بنصفين بخط بز كما بيّن ببرهان ط مِن ا فخط زه اعظم مِن خط زا لانّ زاوية ابج كما بيّنّا اعظم مِن زاوية دبه فمِن اجل ذلك وقعت نقطة ز بين نقطتى اد فمِن اجل ذلك يكون خط هز اطول مِن خط زا فبحسب برهان الشكل الذى وطّى لهذا الشكل يكون ضلع به اعظم مِن ضلع اب لكن ضلع به مثل ضلع اج فضلع اج اعظم مِن ضلع اب وذلك ما اردنا ان نبيّن .

الشكل العشرون مِن المقالة الاولى

كل مثلث (ع) فان كلّ ضلعين مِن اضلاعه مجموعين كخط واحد (ط) اعظم[1] مِن الضلع[2] الثالث مثاله مثلث ابج فاقول ان مجموع ضلعَى اب بج كخط واحد اعظم مِن ضلع اج وان مجموع ضلع (ضلعى .scr) اب اج كخط واحد اعظم مِن ضلع بج وان مجموع ضلعى اج جب كخط واحد اعظم مِن ضلع اب بُرهانه ان الاضلاع الثلثة ان كانت متساوية فظاهر ان ضلعين منها اذا جُمعَا كخط واحد اعظم مِن الضلع الثالث وان كانت مختلفة فلنُنزل ان احدَها اعظمُها ونُبيّن ان الباقيين اذا جُمعا كخط واحد كان اعظمَ مِنْهُ وليكن اعظمها ضلع بج ونخرج خط اب على الاستقامة الى نقطة د ونفرض اد مثل اج ونخرج خط جد فلان مثلث اجد متساوى الساقيين ساق اج مثل ساق اد فببرهان ه مِن ا تكون زاوية اجد مثل زاوية ادج فاذا زدنا عليها زاوية اجب تكون زاوية بجد باسرها اعظم مِن زاوية بدج فمثلث بجد زاوية بجد [منه] اعظم

---

1) Atramento rubro supra scriptum اطول (longiora).

2) Atr. rub. additum est uerbum الضلع

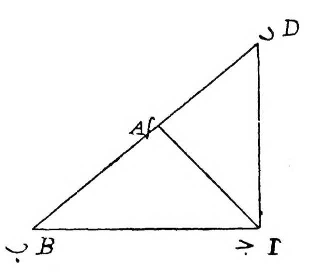
latus AG latere AB maius esse. Latus BG in puncto D in duas partes secemus, ita ut in I, 10 demonstrauimus. Lineam AD ductam ad punctum E producimus, et sit $DE=AD$. Deinde lineam BE ita ducimus, ut duo latera BD, DE aequalia sint lateribus GD, DA, et angulus DBE angulo AGD aequalis fiat. Itaque angulus ABG maior est angulo DBE. Iam angulum ABE linea BZ in duas partes secamus, ita ut in I, 9 demonstratum est. Linea ZE igitur linea ZA maior est, quia angulus ABG, ita ut demonstrauimus, angulo DBE maior est. Unde manifestum est, punctum Z inter puncta A, D cadere et ea de causa lineam EZ longiorem esse linea ZA. Iam ex demonstratione propositioni huic praemissa latus BE latere AB maius est. Uerum latus BE lateri AG aequale est. Ergo latus AG latere AB maius est. Q. n. e. d.

Propositio uicesima libri primi.

In quouis triangulo duo latera coniuncta, ita ut una linea fiant, tertio latere maiora sunt.

Exemplificatio. Sit triangulus ABG. Dico, et summam duorum laterum AB, BG in directum coniunctorum maiorem esse latere AG, et summam duorum laterum AB, AG in directum coniunctorum maiorem latere BG, et summam duorum laterum AG, GB coniunctorum maiorem latere AB.

Demonstratio. Si tria latera inter se aequalia sunt, manifestum est, duo eorum in directum coniuncta latere tertio maiora esse. Sin autem inaequalia sunt, supponamus, unum eorum maximum esse, et demonstrabimus, duo reliqua in directum coniuncta eo maiora esse. Sit maximum eorum latus BG. Lineam AB in directum producimus ad punctum D et AD [rectae] AG aequalem sumimus et



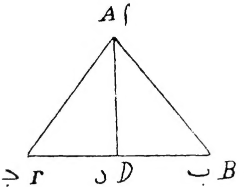
lineam GD ducimus. Quoniam triangulus AGD aequicrurius est, et crus AG cruri AD aequale, ex I, 5 erit $\angle AGD = \angle ADG$. Si illi angulum AGB addiderimus, totus angulus BGD angulo BDG

من زاوية بدج فببرهان يط من ا ضلع بد اعظم من ضلع بج
لكن ضلع بد هو مساو لمجموع ضلعَى با اج فقد تبيّن ان كل
مثلث فان ضلعين من اضلاعه مجموعين كخط واحد اعظم من
الضلع الثالث وذلك ما اردنا ان نبيّن ع بُرهان[1] اخر لهذا الشكل 12 u.
فليكن مثلث ابج فاقول ان مجموع ضلعَى اب اج اعظم من
ضلع بج على ان ضلع بج اعظم من كل واحد من ضلعى اب
اج برهانه انا نقسم زاوية باج بنصفين بخط اد كما بيّن ببرهان
ط من ا فمثلث ابد زاويته الخارجة اعنى زاوية ادج اعظم من
زاوية باد التى هى مساوية لزاوية جاد وذلك بيّن ببرهان يو من
ا فمثلث ادج زاوية ادج منه اعظم من زاوية جاد فببرهان يط من
ا يكون ضلع اج اعظم من ضلع جد وبمثل هذا البرهان يتبيّن
ان ضلع اب اعظم من ضلع دب فمجموع ضلعَى اب اج اذن اعظم
من ضلع بج وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ برهان اخر زيادة فليكن
مثلث ابج وضلع بج اطولُ الاضلاع ونفصل بد مثل اب كما
بيّن ببرهان ج من ا فبما بيّن ببرهان ه من ا تكون زاوية باد
مثل زاوية بدا وبما بيّنا ببرهان يو من ا تكون زاوية بدا اعظم
من زاوية داج وكذلك زاوية جدا اعظم من زاوية داب فالزاويتان
اللتان عند نقطة د عن جنبتى خط اد اذا جُمِعتا اعظم من زاوية
باج وَحدَها وقد تبيّن ان زاوية بدا مثل زاوية باد فتبقى
زاوية ادج اعظم من زاوية جاد فضلع جا اعظم من ضلع جد وبد
مثل اب فمجموع ضلعى اب اج اعظم من ضلع بج وذلك ما اردنا

[1]) Supra scriptum: زيادة: addenda.

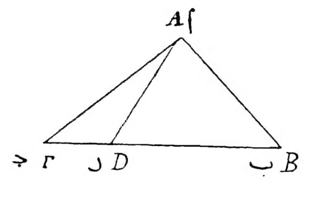
maior erit. In triangulo igitur BGD angulus BGD angulo BDG maior est; itaque ex I, 19 latus BD maius est latere BG. Sed latus BD aequale est summae duorum laterum BA, AG. Ergo demonstratum est, in quouis triangulo duo latera ita coniuncta, ut una linea fiant, tertio latere maiora esse. Q. n. e. d.

Alia demonstratio*) huius propositionis. Sit triangulus ABG. Dico, summam duorum laterum AB, AG maiorem esse latere BG, ubi latus BG utrouis laterum AB, AG maius sit.



Demonstratio. Angulum BAG in duas partes [aequales] diuidimus linea AD, ita ut in I, 9 demonstratum est. In triangulo ABD igitur angulus extrinsecus positus ADG maior est angulo BAD, qui aequalis est angulo GAD; hoc enim in I, 16 demonstratum est. Et in triangulo ADG angulus ADG maior est angulo GAD. Ergo ex I, 19 latus AG latere GD maius est. Et eodem modo, quo in hac demonstratione, demonstratur, latus AB latere DB maius esse. Ergo summa duorum laterum AB, AG maior est latere BG. Q. n. e. d.

Alia demonstratio**) addenda. Sit triangulus ABG, et latus BG sit maximum. BD [rectae] AB aequalem abscindimus, ita ut in I, 3 demonstratum est. Itaque ex eo, quod in I, 5 demonstratum est, erit $\angle BAD = \angle BDA$. Sed ex eo, quod in I, 16 demonstrauimus, angulus BDA angulo DAG maior est; et eodem modo angulus GDA angulo DAB maior est, ita ut duo anguli, qui ad punctum D in utraque parte lineae AD positi sunt, coniuncti angulo BAG solo maiores sint. Sed iam demonstratum est, angulum BDA aequalem esse angulo BAD; itaque relinquitur angulus ADG angulo GAD maior, et latus GA



*) Heronis apud Proclum p. 323, 6 sq.
**) Eiusdem Heronis apud Proclum p. 324, 3 sq.

ان نبيّن ∴ وايضا زيادة فى هذا الشكل ان قال قائل انه يُمكن
ان يكون مثلث ضلعان مِن اضلاعه مساويان للضلع الباقى
فلْننزِل مثلث ابج وننزل ان مجموع ضلعَى اب اج مساوٍ لضلع
بج فنفصل بد مثل اب كما بيّن ببرهان ج مِن ا فيبقى دج
مثل جا ونخرج خط اد فلان ضلع بد مثل ضلع با فان زاوية
ادب مساوية لزاوية داب بحسب برهان ه مِن ا وبمثل هذا البرهان
يتبيّن ان زاوية داج مساوية لزاوية جدا لكن الزاويتين اللتين
عند نقطة د عن جنبتى خط اد معادلتان لقائمتين وذلك بيّن
بحسب برهان يج مِن ا وهما مساويتان لزاوية باج وهذا محالٌ لا
يُمكن مِن اجل ان خط دا قام على نقطة ا على فصل خطى با
اج فصيّر زاويتى باد داج معادلتين لقائمتين فبحسب برهان يد،
مِن ا يجب ان يكون خطا با اج قد اتّصلا على استقامة وصارا خطًا
واحدًا مستقيما فخطا با اج اذن خط واحد مستقيم فمثلث باج
يحيط به خطان مستقيمان هذا خلف غير ممكن وذلك ما اردنا
ان نبيّن ∴ وايضا زيادة فى هذا الشكل ثم ننزل ايضا ان ضلعى
اب اج مجموعين اصغر مِن ضلع بج ونفصل بد مثل با وجه مثل
اج فببرهان ه تكون زاويتا بد[ا] باد مساويتين وكذلك زاويتا
جها جاه متساويتان لكن زاوية ادب اعظم مِن زاوية داج وزاوية
داج اعظم مِن زاوية جاه فزاوية ادب اذن اعظم مِن زاوية جاه

---

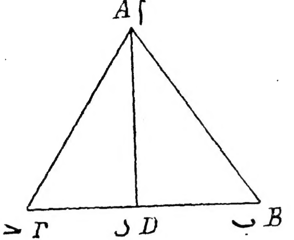
*) Proclus p. 325, 3 sq.

**) Causam addidit Arabs ipse per ambages inutiles, ut solet.

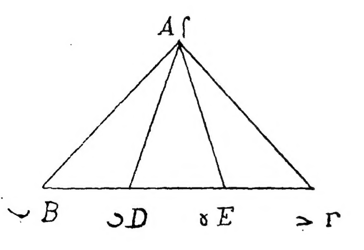
***) Est pars secunda demonstrationis proxime praecedentis (u. Proclus p. 325, 11 sq.), quam Arabs omisso initio (Proclus p. 325, 1—3) iniuria in duas discidit.

latere GD maius. Sed $BD = AB$. Ergo summa duorum laterum AB, AG maior est latere BG. Q. n. e. d.

H o c q u o q u e huic propositioni a d d e n d u m est. Si quis dixerit, fieri posse, ut duo latera trianguli reliquo lateri aequalia sint, ponamus triangulum ABG et supponamus, summam duorum laterum AB, AG lateri BG aequalia esse.*) Abscindimus $BD = AB$, ut in I, 3 demonstratum est, ita ut relinquatur $DG = GA$. Lineam AD ducimus. Iam quoniam latus BD lateri BA aequale est, angulus ADB ex I, 5 aequalis erit angulo DAB. Et eodem modo, quo in hac demonstratione, demonstratur, angulum DAG angulo GDA aequalem esse. Sed duo anguli ad punctum D in utraque parte lineae AD positi duobus rectis aequales sunt, quod ex I, 13 demonstrari potest. Et iidem angulo BAG aequales sunt;**) quod fieri non potest, quia recta DA in puncto A duarum rectarum BA, AG communi erecta est, ita ut duos angulos BAD, DAG duobus rectis aequales efficiat; quare ex I, 14 lineae BA, AG in directum coniunctae sunt unamque efficiunt lineam rectam. Itaque etiam lineae BA, AG una linea recta sunt. Duae igitur rectae lineae triangulum BAG comprehendunt, quod absurdum est neque fieri potest. Q. n. e. d.



Hoc quoque***) addendum est huic propositioni. Supponamus etiam, duo latera AB, AG coniuncta latere BG minora esse. Abscindimus BD [lateri] BA aequalem et GE aequalem [lateri] AG. Itaque ex [I,] 5 duo anguli BDA, BAD aequales sunt, et eodem modo duo anguli GEA, GAE inter se aequales. Sed angulus ADB maior est angulo DAG. Et angulus DAG maior angulo GAE. Itaque angulus ADB multo maior est angulo GAE. Eodem modo demonstratur, angulum AEG multo maiorem esse



كثيرًا وكذلك يتبيّن ان زاوية اهج اعظم من زاوية باد كثيرًا فمجموع زاويتى ادب اهج اعظم من مجموع زاويتى باد جاه وقد كان مساويًا له وهذا محالٌ ❊

الشكل الحادى والعشرون من المقالة الاولى

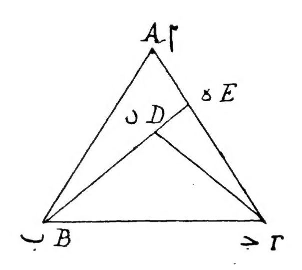
13 r.

كل مثلث يخرج(ع) من طرفى ضلع من اضلاعه خطان يلتقى طرفاهما على نقطة فى داخل المثلث فانهما اقصرُ(ط) من ضلعى المثلث الباقيين ولكنهما يحيطان بزاويةٍ اعظم من الزاوية التى يحيط بها ضلعا المثلث ∴ مثاله ان مثلث ابج قد خرج من طرفى ضلع بج منه خطا بد جد والتقى طرفاهما داخل المثلث على نقطة د فاقول ان مجموعهما اصغر من مجموع ضلعى اب اج وان زاوية بدج اعظم من زاوية باج برهانه انّا نخرج خط دب على استقامته الى نقطة ه فمجموع ضلعى با اه اعظم من ضلع به ونجعل جه مشتركًا فمجموعُ ضلعى با اج اعظم من مجموع ضلعى به هج وذلك بيّن بحسب برهان ك من ا وايضا مجموع ضلعى جه هد اعظم من ضلع جد ونجعل دب مشتركًا فمجموعُ ضلعَى جه هب اعظم من مجموع ضلعى جد دب وذلك بيّن ايضا من برهان ك من ا فمجموع ضلعى اج اب اذن اعظمُ من مجموع ضلعى بد دج كثيرًا وايضا فان زاوية جهد خارجة من مثلث ابه فهى اذن اعظم من زاوية هاب وذلك بيّن بحسب برهان يو من ا وبهذا الاستشهاد تكون زاوية بدج اعظم من زاوية جهد فزاوية بدج اذن اعظمُ من زاوية باج كثيرًا وذلك ما اردنا ان نبيّن .

angulo BAD, ita ut summa duorum angulorum ADB, AEG maior sit summa duorum angulorum BAD, GAE. Sed eadem eis aequalis est. Quod absurdum est.

Propositio XXI libri primi.

Si in quouis triangulo ab terminis alicuius lateris eius duae lineae ducuntur, quarum termini in puncto intra triangulum posito congruunt, breuiores erunt duobus reliquis lateribus trianguli, sed angulus, quem comprehendunt, maior erit angulo, quem duo latera trianguli comprehendunt.



Exemplificatio. In triangulo ABG a terminis lateris eius BG ductae sunt duae lineae BD, GD, quarum termini intra triangulum congruunt in puncto D. Dico, summam earum minorem esse summa duorum laterum AB, AG, et angulum BDG maiorem esse angulo BAG.

Demonstratio. Lineam DB in directum producimus ad punctum E; itaque summa duorum laterum BA, AE maior est latere BE. GE communem adiicimus, summa igitur duorum laterum BA, AG maior est summa duorum laterum BE, EG. Quod ex I, 20 demonstratur. Uerum etiam summa duorum laterum GE, ED maior est latere GD. DB communem adiicimus. Summa igitur duorum laterum GE, EB maior est summa duorum laterum GD, DB. Hoc quoque ex I, 20 demonstratur. Itaque summa duorum laterum AG, AB multo maior est summa duorum laterum BD, DG. Rursus autem angulus GED ad triangulum ABE extrinsecus positus maior est angulo EAB, quod ex I, 16 demonstratur. Eadem ratione angulus BDG angulo GED maior est. Ergo angulus BDG multo maior est angulo BAG. Q. n. e. d.

الشكل الثانى والعشرون مِن المقالة الاولى

نريد ان نُبيّن كيف نعمل (ط) مثلثا من ثلثة (ع) خطوطٍ مفروضةٍ (مساوية لثلثة خطوط معل[ومة][1]) على ان كل خطين مِنها مجموعين اعظم[2] مِن الخط الثالث لان سبيل المثلث بحسب برهان ك مِن ا ان يكون كل ضلعين مِن اضلاعه اذا جُمِعا اعظمُ مِن الثالث ∴ مثاله ان خطوط ا ب ج الثلثة مفروضة ونريد ان نبيّن كيف نعمل منها مثلثا على ان مجموع خطى اب لخطٍّ واحدٍ اعظم مِن خط ج ومجموع خطى بج اعظم مِن خط ا ومجموع خطى جا اعظم مِن خط ب فنخط خطا مستقيما غير محدود النهاية وهو خط دط ونفصل دز مساويا لخط ا ونفصل زح مساويا لخط ب ونفصل حط مساويا لخط ج بحسب ما بُيّن ببرهان جَ ونجعل نقطة ز مركزًا ونخطّ ببعد زد دائرة دكل ونجعل نقطة ح مركزًا ونخط ببعد حط دائرة طكل ونُخرِجُ مِن نقطة ك خطى كز كح فلانّ نقطة ز مركز لدائرة دكل وقد خرج منها الى المحيط خطا زك زد فخط زك اِذن مثل خط زد لكن خط زد مثل ا فضلع زك مثل ا وايضا فان نقطة ح مركز لدائرة طكل وقد خرج منها الى المحيط خطا حط حك فخط حك اذن مثل خط حط وخط حط فصلناهُ مثل خط ج فضلع كح مساوٍ لخط ج وكُنّا فصلنا زح مثل خط ب فاضلاع مثلث زكح مساوية لخطوط ابج زك مثل ا وكح مثل ج وزح

---

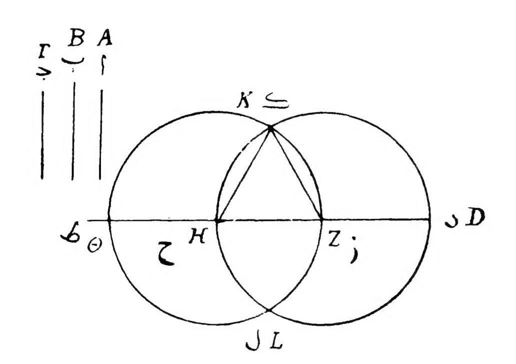
[1]) In margine atr. rubro addita.

[2]) Atr. rubro supra scriptum: اطول, longiores.

Propositio XXII libri primi.

Demonstrare uolumus, quo modo triangulum constituamus ex tribus lineis datis, quae tribus lineis notis aequales sunt, eius modi, ut duae lineae coniunctae linea tertia maiores sunt, quoniam ratio trianguli ex I, 20 ea est, ut duo latera eius coniuncta semper tertia maiora sunt.

Exemplificatio. Tres lineae A, B, G datae sunt. Demonstrare uolumus, quo modo ex iis triangulum construamus ita, ut summa duarum linearum A, B in directum coniunctarum linea G maior sit, et summa duarum linearum B, G maior linea A, et summa duarum linearum G, A maior linea B.



Lineam rectam ex altera parte interminatam $D\Theta$ ducimus et DZ lineae A, ZH lineae B, $H\Theta$ lineae G aequalem abscindimus ex eo, quod in [I,] 3 demonstratum est.

Et puncto Z centro, distantia autem ZD circulum DKL describimus, puncto H centro, distantia autem $H\Theta$ circulum ΘKL, et a puncto K duas lineas KZ, KH ducimus. Iam quoniam punctum Z centrum est circuli DKL, et duae lineae ZK, ZD ab eo ad ambitum ductae sunt, linea ZK linae ZD aequalis erit. Sed $ZD = A$. Latus ZK igitur [lineae] A aequalis est. Rursus quoniam punctum H centrum est circuli ΘKL, et lineae $H\Theta$, HK ab eo ad ambitum ductae sunt, linea HK lineae $H\Theta$ aequalis erit. Et lineam $H\Theta$ lineae G aequalem abscidimus. Latus KH igitur lineae G aequale est. Et ZH lineae B aequalem abscidimus. Latera trianguli ZKH igitur lineis A, B, G aqualia sunt, $ZK = A$, $KH = G$, $ZH = B$. Ergo ex eo, quod diximus,

مثل ب فقد تبيّن مما وصفنا انا قد عملنا مثلثا مساوية اضلاعه لخطوط ا ب ج المعلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الثالث والعشرون مِن المقالة الاولى

نريد ان نبيّن كيف نعمل على نقطة معلومة مِن خطٍ مفروضٍ 13 u زاويةً مساويةً لزاويةٍ مفروضةٍ فلننزل ان الخط اب والنقطة المفروضة نقطة ا والزاوية المفروضة زاوية ەدز ونريد ان نبيّن كيف نعمل على نقطة ا زاويةً مثل زاوية ەدز فنُعلِم على خط دە نقطة ح وعلى خط دز نقطة ط ونخرج خط حط ونعمل على خط اب مثلثا اضلاعُه مساوية للاضلاع مثلث دحط ونتفقّدُ عِند عَملِنا بان نجعل ضلع اك مثل ضلع دح وضلع كل مثل ضلع حط وضلع ال مثل ضلع دط بحسب ما بيّنّا عملَ ذلك ببرهان كب مِن ا وقد علمنا ببرهان ح مِن ا ان زاوية كال مساوية لزاوية حدط وذلك لان الضلعين المحيطين بزاوية كال قد بيّنّا انهما مساويان للضلعين المحيطين بزاوية حدط كل ضلع مساوٍ لنظيره وقاعدة كل مثل قاعدة حط فالزاويتان اللتان يواترُهما هاتان القاعدتان المتساويتان متساويتان فقد عملنا على نقطة مفروضةٍ مِن خط مفروض زاويةً مساويةً لزاوية مفروضةٍ وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الرابع والعشرون مِن المقالة الاولى

كل مثلثين يساوى ضلعان مِن احدهما ضلعَين مِن الآخر كل ضلع لنظيره وتكون احدى الزاويتين اللتين يحيط بهما الاضلاع

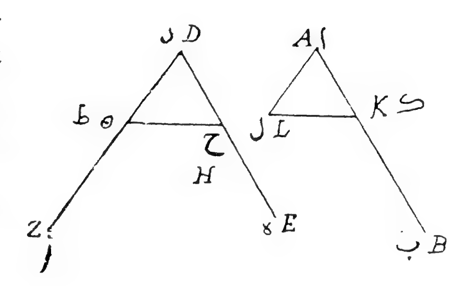
demonstratum est, nos triangulum, cuius latera datis lineis A, B, G aequalia sunt, construxisse. Q. n. e. d.

Propositio XXIII libri primi.

Explicare uolumus, quo modo ad punctum datum in recta data angulum angulo dato aequalem construamus.

Ponamus lineam esse AB, et punctum datum esse punctum A, et angulum datum esse angulum EDZ. Explicare uolumus, quo modo ad punctum A angulum angulo EDZ aequalem construamus.

In linea DE punctum H, in linea DZ autem punctum Θ sumimus. Ducta linea $H\Theta$ in linea AB triangulum cuius latera aequalia sint lateribus trianguli $DH\Theta$, construimus, et quaerimus diligenter, ut sit $AK = DH$, $KL = H\Theta$, $AL = D\Theta$, quoniam hanc constructionem in I, 22 demonstrauerimus. Iam ex I, 8 scimus, angulum KAL angulo $HD\Theta$ aequalem esse, quoniam iam demonstrauimus, duo latera, quae angulum KAL comprehendunt, duobus lateribus, quae angulum $HD\Theta$ comprehendunt, alterum alteri aequalia esse, et $KL = H\Theta$; quare duo anguli, sub quibus subtendunt hae duae bases inter se aequales, inter se aequales sunt. Ergo iam ad punctum datum in linea data angulum angulo dato aequalem construximus. Q. n. e. d.



Propositio XXIV libri primi.

Si in duobus triangulis duo latera alterius duobus lateribus alterius aequalia sunt, alterum alteri, et angulorum, quos latera inter se aequalia comprehendunt, alter altero maior est, reliquum

المتساوية اعظم مِن الزاوية الاخرى فان[1] الضلعَ الباقى الذى يوتّر
الزاوية العظمى اعظم مِن الضلع الباقى مِن المثلث الاخر الذى
يوتّر الزاوية الصُغرى مثاله ان ضلعى اب اج مِن مثلث ابج
مساويان لضلعَى ده دز مِن مثلث هدز ضلع اب مثل ضلع ده وضلع
اج مثل ضلع دز وزاوية باج اعظم مِن زاوية هدز فاقول ان ضلع
بج الذى يوتر زاوية باج العُظمى اعظم مِن ضلع هز الذى يوتر
زاوية هدز الصُغرى بُرهانه انا نعمل على نقطة د مِن خط هد زاويةً
مثل زاوية باج كما بيّنّا عملها ببرهان كج مِن [ا] ولتكن زاوية
هدح ونجعل دح مثل اج كما بيّنّا ذلك ببرهان ج مِن ا ونخرج
خطى حز حه فضلعا با اج مِن مثلث ابج مساويان لضلعى ده
دح مِن مثلث هدح كل ضلع مثل نظيره ضلع اب مثل ضلع ده
وضلعُ اج مثل ضلع دح وزاوية باج مثل زاوية هدح فبحسب برهان
د مِن ا تكون قاعدة بج مساوية لقاعدة هح وايضا فان مثلث
دزح متساوى الساقين ساق دز مثل ساق دح فبحسب برهان ه
مِن ا تكون زاوية دزح مساوية لزاوية دحز لكن زاوية دحز
اعظم مِن زاوية هحز فزاوية دزح اعظم مِن زاوية هحز فاذا زدنا زاوية
هزد كانت زاوية هزح اعظم مِن زاوية هحز كثيرًا فمثلث هزح له
زاويتان احداهما اعظمُ من الاخرى اعنى ان زاوية هزح اعظم مِن
زاوية هحز فبحسب برهان يط مِن ا يكون ضلع هح الموتّر للزاوية

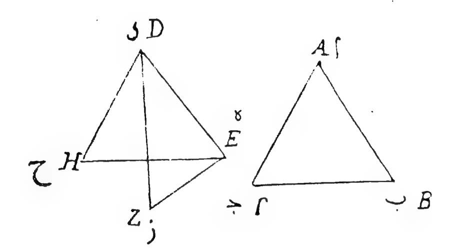
---

[1]) In margine atramento rubro additum: قاعدة المثلث الذى زاويته اعظم اطول مِن قاعدة الاخرى Basis trianguli, cujus angulus maior, longior est basi alterius.

latus, quod angulo maiori oppositum est, reliquo latere alterius trianguli angulo minori opposito maius est.

Exemplificatio. Duo latera AB, AG trianguli ABG aequalia sint duobus lateribus DE, DZ trianguli EDZ, $AB = DE$, $AG = DZ$, et angulus BAG maior sit angulo EDZ. Dico, latus BG angulo BAG maiori oppositum maius esse latere EZ angulo EDZ minori opposito.

Demonstratio. Ad punctum D lineae ED angulum angulo BAG aequalem construimus, ita ut in I, 23 demonstrauimus, qui sit angulus EDH. Posita [linea] DH [lineae] AG aequali, quod in I, 3 demonstrauimus, duas lineas HZ, HE ducimus. Itaque duo latera BA, AG trianguli ABG duobus lateribus DE, DH trianguli EDH aequalia sunt, alterum alteri, $AB = DE$, $AG = DH$, et $\angle BAG = \angle EDH$. Itaque ex I, 4 basis BG aequalis est basi EH. Rursus quoniam in triangulo DZH duo latera inter se aequalia sunt, $DZ = DH$, ex I, 5 erit $\angle DZH = \angle DHZ$. Sed angulus DHZ maior est angulo EHZ; quare angulus DZH maior est angulo EHZ. Itaque adiecto angulo EZD angulus EZH multo maior erit angulo EHZ. In triangulo EZH igitur duo anguli sunt, quorum alter altero maior, $\angle EZH > \angle EHZ$. Quare ex I, 19 latus EH maiori angulo oppositum maius est latere EZ angulo minori opposito. Sed $EH = BG$. Ergo iam demonstrauimus basim BG basi EZ maiorem esse. Q. n. e. d.



Additamentum ad hanc propositionem.*)

Si lineam DH lateri AG aequalem duxerimus**), et deinde

*) Proclus p. 339, 2 sq.

**) Et ita, ut sit $\angle EDH = \angle BAG$; u. Proclus p. 338, 8, quam demonstrationis partem male omisit Arabs.

العظمى اعظم مِن ضلع هز الموتّر للزاوية الصغرى لكن هح مثل
بج فقاعدة بج قد تبيّن انها اعظم مِن قاعدة هز وذلك ما اردنا
ان نبيّن زيادة فى هذا الشكل فانّا متى اخرجنا خط دح مساويًا
لضلع اج ثم اخرجنا خط حه فجاز نقطةَ ز (Scr. ه) فحدث مثلث
دحه وقد خرج مِن طرفَى ضلع مِن اضلاعِه وهو ضلع ده خطان
وهما دز هز فالتقى طرفاهما على نقطة ز داخلَ المثلث فبحسب
برهان كا مِن ا فان مجموع ضلعى هز دز لخطٍ واحدٍ اصغر مِن 14 r.
مجموع ضلعى دح حه لكن ضلع دح مثل ضلع دز فيبقى ضلع
هح اعظم مِن ضلع هز وقد تبيّن بحسب برهان [د] من [ا] ان قاعدة
هح مثل قاعدة بج فقاعدة بج اذن اعظم مِن قاعدة هز وذلك ما
اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الخامس والعشرون من المقالة الاولى[1]

كل مثلثين(ع) يساوى ضلعان مِن احدهما ضلعين مِن الاخر كل
ضلع لنظيره[2] والضلع الباقى مِن احدهما اعظم مِن الضلع الباقى
مِن المثلث الاخر فان زاوية المثلث التى يوتّرُها الضلع الاعظم
اعظم (ط) مِن الزاوية الاخرى التى يُوترها الضلعُ الاصغرُ مثالُه ان

---

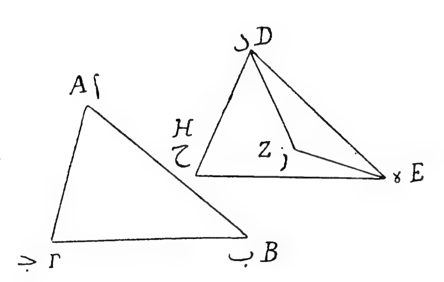
[1] In margine legitur: هذا هو عكس الرابع والع[شرين]: Inuersio est prop. XXIV.

[2] In margine atramento rubro addita sunt:

وقاعدة احدهما اطول مِن قاعدة الاخر فانّ زاوية المثلث
الطويل القاعدة اع[ظم] مِن زاوية المثلث القصير القاعدة

»Et si basis alterius basi alterius longior est, angulus trianguli, cuius basis longior, maior est angulo trianguli, cuius basis breuior.« — Altera forma huius propositionis.

lineam HE duxerimus, ut per punctum Z (scr. E) transeat et triangulus DHE fiat, in quo a duobus terminis alicuius lateris eius, quod est latus DE, duae lineae ductae sunt, DZ, EZ, ita ut termini earum in puncto Z intra triangulum congruant, tum ex I, 21 summa duorum laterum EZ, DZ in directum coniunctorum minor erit summa duorum laterum DH, HE. Est autem $DH = DZ$; relinquitur igitur latus EH latere EZ maius. Sed iam demonstrauimus ex I, 4, basim EH basi BG aequalem esse. Ergo basis BG maior est basi EZ. Q. n. e. d.



Propositio XXV libri primi.

Si in duobus triangulis duo latera alterius duobus lateribus alterius aequalia sunt alterum alteri, et reliquum latus alterius maius est reliquo latere alterius trianguli, angulus trianguli, cui latus maius oppositum est, maior est angulo altero, cui latus minus oppositum est.

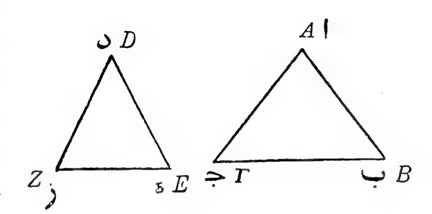
Exemplificatio. Duo latera AB, AG trianguli ABG aequalia sint duobus lateribus DE, DZ trianguli EDZ, $AB = DE$, $AG = DZ$, et reliquum latus BG trianguli ABG maius sit reliquo latere EZ trianguli EDZ. Dico, angulum BAG maiorem esse angulo EDZ.

Demonstratio. Nam si eo maior non est, aut ei aequalis est aut minor. Si ei aequalis sit, ex eo, quod in I, 4 demonstrauimus, necesse est, basim BG basi EZ aequalem esse. At maior est; quod absurdum est neque fieri potest. Ergo BG [rectae] EZ aequalis non est*). Rursus non necesse est [scr. fieri non po-

*) Res Arabs confudit. Scribere debuisset: Ergo angulus BAG angulo EDZ aequalis non est.

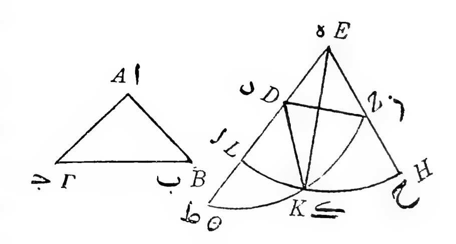
ضلعى اب اج مِن مثلث ابج يساويان ضلعى ده دز من مثلث
ەدز ضلع اب مثل ضلع ده وضلع اج مثل ضلع دز وضلع بج
الباقى مِن مثلث ابج اعظم مِن ضلع ەز مِن مثلث ەدز الباقى
فاقول ان زاوية باج اعظم مِن زاوية ەدز برهانه انها ان لم تكون
اعظمَ منها فهى مثلها او اصغرُ منها ولو كانت مثلها فانّ ممّا
بيّنّا ببرهان د مِن ا يجب ان تكون قاعدة بج مثل قاعدة ەز
وهى اعظم منها هذا خلف لا يمكن فليس بج اذًا مثل ەز
ولا يجب ايضًا ان تكون اصغرَ منها الانها ان كانت اصغر
منها فبحسب برهان كد من ا يجب ان يكون ضلع بج
اصغر مِن ضلع ەز وكنّا فرضناهُ اعظمَ منه هذا خلف غير ممكن
فقد نبيّن ان زاوية ا ليست بمساوية لزاوية د ولا هى ايضا اصغر
منها فهى اذن اعظم منها وذلك ما اردنا ان نبيّن مُضافٌ الى هذا
الشكل وليس يُعرف صاحِبُه وهو برهانه مِن غير طريق الخلفِ
فلننزل ان مثلثى ابج دەز ضلع اب مثل ضلع ده وضلع اج مثل
ضلع دز وضلع بج الباقى اعظم مِن ضلع ەز الباقى فاقول ان
زاوية باج اعظم مِن زاوية ەدز برهانه انا نُخرج خط ەز الى ح على
الاستقامة ونجعل ەح مثل بج ونخرج خط ەد على الاستقامة الى
نقطة ط ونجعل دط مثل اج ونجعل نقطة د مركزًا ونخط ببعد دط
قوس طكز لان طد مثل دز فلان ضلعى اب واج كخطٍّ واحِدٍ اعظمَ
مِن ضلع بج كالذى نبيّن من برهان ك مِن ا وضلع بج مساوٍ
لضلع ەح ومجموع ضلعى اب اج كخط واحد هو خط ەط فخط ەط
اذن اعظم من خط ەح ونجعل نقطة ە مركزًا ونخط ببعد ەح (ف)قوس

test], ut eo minor sit. Si enim minor sit, ex I, 24 necesse est, latus BG minus esse latere EZ; sed supposuimus, illud maius esse; quod absurdum est neque fieri potest. Demonstrauimus igitur, angulum A neque aequalem angulo D neque minorem esse. Ergo maior est. Q. n. e. d.



Additamentum ad banc propositionem, cuius scriptor ignotus est, et haec demonstratio per reductionem in absurdum non procedit*). Supponamus, duos triangulos ABG, DEZ latus AB lateri DE aequale habentes et $AG = DZ$, et latus reliquum BG latere reliquo EZ maius esse. Dico, angulum BAG maiorem esse angulo EDZ.

Demonstratio. Lineam EZ ad H in directum producimus ita, ut EH lineae BG aequalis fiat. Et linea ED in directum ad punctum Θ producta ponimus $D\Theta = AG$. Puncto D centro radio autem $D\Theta$ arcum ΘKZ describimus. Iam quoniam $\Theta D = DZ$, et duo latera AB, AG in directum coniuncta maiora sunt latere BG, ita ut in I, 20 demonstrauimus, et $BG = EH$, et latera AB, AG in directum coniuncta sunt ita, ut linea $E\Theta$ fiant, linea $E\Theta$ maior est linea EH. Iam punctum E centrum sumimus, et radio EH arcum HL**) ducimus. Ducimus EK et



*) Heronis est, de quo Proclus p. 346, 13 sq: οὐ διʼ ἀδυνάτου τὸ αὐτὸ δεικνῦσιν.

**) Secat enim rectam $E\Theta$, quia demonstrauimus, eam maiorem esse quam EH; nec hoc omisit Proclus p. 347, 3 sq.

حل ونخرج هك ودك نخط دك مساوٍ لخط دط لكن دط مثل
اج نخط دك اذن مثل اج وايضا فلان هك مثل هح وخط هح
فرضناه مثل بج يكون هك مثل بج فمثلثا ابج هدك ضلعان
من احدهما مساويان لضلعين من الاخر اب مثل ده واج مثل دك
وضلع بج الباقى مثل ضلع هك الباقى فظاهرٌ من برهان ح من
ا انّ زاوية باج مثل زاوية هدك لكن زاوية هدك اعظم من زاوية
هدز فزاوية باج اذن اعظم من زاوية هدز وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل السادس والعشرون من المقالة الاولى

14 u

كل مثلثين (ع) تُساوى زاويتان من احدهما زاويتين من الاخر
كل زاوية ونظيرتها ويساوى ضلعٌ من احدهما نظيرَهُ من الاخر
اىّ ضلعٍ كان فانّ الضلعين الباقيين من احدهما يساويان (ط)
الضلعين الباقيين من المثلث الاخر كل ضلعٍ لنظيره والزاوية
الباقية مثل (ط) الزاوية الباقية والمثلث (ط) مثل المثلث مثاله ان
زاويتى ابج اجب من مثلث ابج مساويتان لزاويتى دهز دزه من
مثلث دهز زاوية ابج مساوية لزاوية دهز وزاوية اجب مساوية لزاوية
دزه وننزل ان ضلع بج اوّلا مثل ضلع هز فاقول ان ضلعَى با اج
الباقيين مثل ضلعى هد دز الباقيين ضلع اب مثل ضلع ده وضلع
اج مثل ضلع دز وزاوية باج مثل زاوية هدز برهانه انه اِن لم
يكن ضلع با مثل ضلع هد فليكن احدهما اعظم فلننزل ان
ضلع اب اعظمُ ونفصِلُ بح مساويا لضلع ده كما بيّن ببرهان
ج من ا وضلع بج فُرِض مثل ضلع هز فضلعَا جب بح من مثلث

DK; DK igitur lineae $D\Theta$ aequalis est. Sed $D\Theta = AG$, itaque $DK = AG$. Rursus quoniam $EK = EH$, et supposuimus esse $EH = BG$, erit $EK = BG$. Itaque in duobus triangulis ABG, EDK duo latera alterius duobus lateribus alterius aequalia sunt, $AB = DE$, $AG = DK$, et latus reliquum BG lateri reliquo EK aequale. Ex I, 8 igitur manifestum est, angulum BAG angulo EDK aequalem esse. Sed angulus EDK maior est angulo EDZ. Ergo angulus BAG maior est angulo EDZ. Q. n. e. d.

Propositio XXVI libri primi.

Si in duobus triangulis duo anguli alterius duobus angulis alterius aequales sunt alter alteri, et latus quodlibet alterius aequale est lateri alterius, etiam duo reliqua latera alterius aequalia erunt duobus reliquis lateribus alterius alterum alteri, et angulus reliquus angulo reliquo aequalis erit, et triangulus triangulo.

Exemplificatio. Duo anguli ABG, AGB trianguli ABG duobus angulis DEZ, DZE trianguli DEZ aequales sint, $\angle ABG = \angle DEZ$, et $\angle AGB = \angle DZE$. Prius supponimus, latus BG aequale esse lateri EZ. Dico, duo latera reliqua BA, AG reliquis lateribus ED, DZ aequalia esse, $AB = DE$ et $AG = DZ$, et angulum BAG angulo EDZ aequalem.

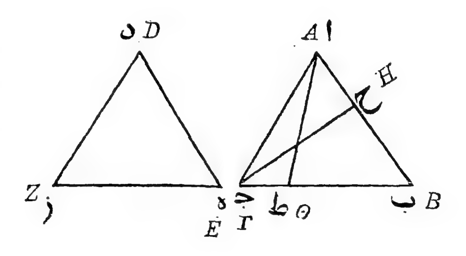
Demonstratio. Si latus BA lateri ED aequale non est, alterutrum maius sit; supponamus latus AB maius esse, et BH lateri DE aequale abscindimus, ita ut in I, 3 demonstrauimus. Supposuimus autem latus BG lateri EZ aequale esse. Itaque duo latera GB, BH trianguli BGH duobus lateribus EZ, ED trianguli EDZ aequalia sunt, alterum alteri. Et angulus DEZ angulo GBH aequalis est. Itaque ex I, 4 angulus BGH angulo DZE aequalis erit. Supposuimus autem angulum DZE angulo AGB aequalem esse. Et quoniam quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt, angulus AGB angulo BGH aequalis

بجح مثل ضلعى هز هد من مثلث هدز كل ضلع مساو لنظيره
وزاوية دهز مساوية لزاوية جبح فبحسب برهان د من ا تكون
زاوية بجح مساوية لزاوية دزه لكن زاوية دزه فُرِضت على انها
مساوية لزاوية اجب والمساوية لشى واحد فهى متساوية فزاوية اجب
مساوية لزاوية بجح العظمى للصغرى وهذا خلف فليس ضلع اب
اعظم مِن ضلع ده ولا يمكن ايضا ان يكون اصغرَ لان البرهان
واحدٌ فضلع اب اذن مساو لضلع ده و ضلع بج مثل ضلع هز
فضلعا اب بج مِن مثلث ابج مثل ضلعَى ده هز مِن مثلث دهز
كل ضلع مساو لنظيره وزاوية ابج مساوية لزاوية دهز فببرهان د
مِن ا يكون ضلع اج الباقى مِن مثلث ابج مثل ضلع دز الباقى
مِن مثلث دهز وزاوية باج مثل زاوية هدز وذلك ما اردنا ان نبيّن ∵
وايضا فانا نُنزل ان ضلع اب مساو لضلع ده وزاوية ب مساوية
لزاوية ه وزاوية ج مساوية لزاوية ز فاقول ان ضلع بج مساو لضلع
هز برهانه انه اذا لم يكن ضلع بج مساويًا لضلع هز فانّ احدهما
اعظم فلنُنزل ان ضلع بج اعظم مِن ضلع هز ونفصل خط بط
مثل ضلع هز كما بيّنّا ببرهان ج مِن ا ونُخرج خط اط فضلعا اب
بط مِن مثلث ابط مساويان لضلعى ده هز مِن مثلث دهز كل
ضلع مساو لنظيره وزاوية ابط مثل زاوية دهز فببرهان د من ا
تكون زاوية اطب مساوية لزاوية دزه وزاوية دزه فُرِضت مساوية
لزاوية اجط فزاوية اطب الخارجة مِن مثلث اجط اذن مساوية لزاوية
اجط الداخلة لكن بحسب برهان يو مِن ا يجب ان تكون زاوية
اطب الخارجة اعظم مِن زاوية اجط الداخلة وهى ايضا مثلُها هذا

erit, maior minori; quod absnrdum est. Latus AB igitur latere DE maius non est. Et eadem ratione demonstratur, fieri non posse, ut minus sit. Ergo latus AB lateri DE aequale est. Et $BG = EZ$. Itaque duo latera AB, BG trianguli ABG duobus lateribus DE, EZ trianguli DEZ aequalia sunt alterum alteri; et angulus ABG angulo DEZ aequalis. Quare ex I, 4 reliquum latus AG trianguli ABG reliquo lateri DZ trianguli DEZ aequale est, et $\angle BAG = \angle EDZ$. Q. n. e. d.

Iam rursus supponimus, latus AB lateri DE aequale esse, et $\angle B = \angle E$, et $\angle G = \angle Z$. Dico, latus BG lateri EZ aequale esse.

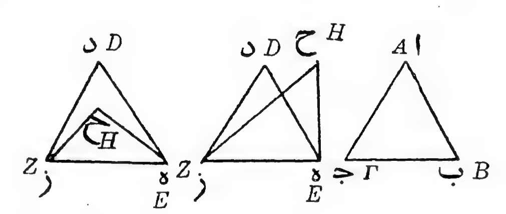
Demonstratio. Si latus BG lateri EZ aequale non est, alterutrum maius est. Supponamus, latus BG latere EZ maius esse, et lineam $B\Theta$ lateri EZ aequalem abscindimus, ita ut in I, 3 demonstrauimus. Lineam $A\Theta$ ducimus. Quoniam duo latera AB, $B\Theta$ trianguli $AB\Theta$ duobus lateribus DE, EZ trianguli DEZ aequalia sunt alterum alteri, et angulus $AB\Theta$ angulo DEZ aequalis, ex I, 4 erit $\angle A\Theta B = \angle DZE$. Supposuimus autem, angulum DZE angulo $AG\Theta$ aequalem esse. Itaque angulus $A\Theta B$ ad triangulum $AG\Theta$ extrinsecus positus angulo $AG\Theta$ intra triangulum posito aequalis erit. Uerum ex I, 16 necesse est, angulum $A\Theta B$ extrinsecus positum angulo $AG\Theta$ intra posito maiorem esse. Sed idem ei aequalis est, quod absurdum est neque fieri potest. Latus BG igitur neque maius neque minus est latere EZ. Ergo ei aequalis est, ita ut duo latera AB, BG trianguli ABG lateribus DE, EZ trianguli DEZ aequalia sint, alterum alteri; et $\angle ABG = \angle DEZ$. Latus igitur reliquum trianguli ABG lateri reliquo trianguli DEZ aequale est, et reliqui anguli reliquis angulis aequales, ita ut sit $AG = DZ$ et $\angle BAG = \angle EDZ$. Q. n. e. d.



خلف لا يمكن فضلع بج اذن ليس باعظم من ضلع هز ولا ايضا
اصغر منه فهو اذن مثله فضلعا اب بج من مثلث ابج مساويان
لضلعى ده هز من مثلث دهز كل ضلع مساو لنظيره وزاوية
ابج مثل زاوية دهز فالضلع الباقى من مثلث ابج مساو
للضلع الباقى من مثلث دهز وسائرُ الزوايا مثل سائر الزوايا
فضلع اج مثل ضلع دز وزاوية باج مساوية لزاوية هدز وذلك ما
اردنا ان نبيّن ∴ مُضافٌ الى هذا الشكل على سبيل التوسُع
وجدْتُهُ ولستُ اعرفُ صاحبَهُ متى كانت زاوية ب مساوية 15 r
لزاوية ه وزاوية ج مساوية لزاوية ز وضلع بج مثل ضلع هز فانا
متى ركّبنا بج على هز نقطة ب على نقطة ه ونقطة ج على نقطة
ز نركّب خط بج على خط هز لانهما متساويان ونركب زاوية ب
على زاوية ه وزاوية ج على زاوية ز فمن البيّن ان ضلعَى اب اج
ينطبقان على هد دز وزاوية ا تنطبق على زاوية د لانه ان لم ينطبق
ضلعا اب اج على ضلعى ده دز فامّا ان يقعا مثل هح زح فتكون
زاوية زهح اعنى زاوية ابج مثل زاوية زهد العظمى مثل الصُغرى
وهذا غير ممكن وان وقعا فى داخل مثلث دهز كخطّى هح زح
فانّ زاوية زهد اعنى زاوية جبا اعظم من زاوية جبا وقد كانت
مثلها وهذا خلف لا يُمكن ∴ وهذا الشكل الزائد ان اُجرى
امرُهُ كما اُجرى الشكل الرابع من هذه المقالة من غير استشهاد
الخلف فانه واضحٌ انّ زاوية ب تنطبق على زاوية ه وزاوية ج تنطبق
على زاوية ز وانّ هاتين الزاويتين اذا انطبقتا على زاويتى هز وانطبق
وتركبَ ضلع بج على ضلع هز فان الضلعين الباقيين يتركّب

Demonstratio ad hanc propositionem addenda uniuersalior, quam repperi, sed cuius auctorem ignoro.*) Quoniam $\angle B = \angle E$, et $\angle G = \angle Z$, et $BG = EZ$, si BG ad EZ, punctum B ad punctum E, punctum G ad punctum Z adplicuerimus, etiam lineam BG ad lineam EZ adplicabimus, quia inter se aequales sunt, et angulum B ad angulum E adplicabimus, angulum G autem ad angulum Z. Sed manifestum est, duo latera AB, AG cum ED, DZ congruere, et angulum A cum angulo D. Nam si latera AB, AG cum lateribus DE, DZ non congruerent, aut ut EH, ZH**) caderent, ita ut angulus ZEH, id est ABG, aequalis esset angulo ZED, maior aequalis minori; quod fieri non potest. Sin intra triangulum DEZ caderent ut duo latera EH, ZH,***) angulus ZED, id est GBA, maior esset angulo GBA. Sed ei aequalis est.†) Quod absurdum est neque fieri potest.

Si in hac demonstratione addita eodem modo rem agimus, quo in propositione quarta huius libri, reductione in absurdum non usurpata, manifestum est, angulum B cum angulo E, angulum G cum angulo Z congruere, et praeterea, quoniam illi duo anguli cum duobus angulis E, Z congruant, et latus BG cum latere EZ congruat et in id cadat, etiam duo reliqua latera congruere, alterum cum altero, et angulum A in angulum D cadere, et triangulum cum triangulo congruere. Q. n. e. d.



Si hoc praemissum recte se habet, etiam demonstratio propositionis sextae huius libri reductione ad absurdum non usurpata perficitur; quae haec est: si in triangulo duo anguli inter se aequales sunt, triangulus aequicrurius est.

---

*) Apud Proclum non exstat, nec multum ualet.

**) Scilicet extra triangulum ut in secunda figura.

***) In prima figura.

†) Dicere debuit: erit angulus ZEH minor angulo ZED; sed ZEH siue GBA aequalis est angulo ZED.

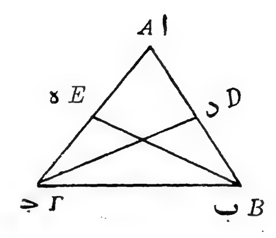
كل واحدٍ منهما على نظيرِه وتتركّب زاوية ا على زاوية د ويتركّب المثلث على المثلث وذلك ما اردنا ان نبيّن فاذا حَصَلَتْ هذه المقدّمة فانه يحصل بُرهانُ الشكل السادس مِن هذه المقالة بغير خلفٍ وهو اذا تساوت زاويتان مِن مثلّثٍ فهو متساوى الساقين مثالُه ان مثلث ابج زاوية ابج منه مساوية لزاوية اجب فاقول ان ساق اب مثل ساق اج برهانه انا نفصِل بد جه متساويين ونخرج خطّى به جد فضِلعَا دب بج مثل ضلعَى هج جب فزاوية دبج مثل زاوية بجه فبحسب برهان د مِن ا تكون قاعدة دج مثل قاعدة هب وزاوية جبه مثل زاوية بجد وزاوية بدج مثل زاوية بهج وبحسب برهان الشكل الزائد فى كو مِن ا فان زاوية اهب الباقية مساوية لزاوية ادج الباقية وضلع اب مثل ضلع اج وايضًا فانّ زاوية ابه الباقية مثل زاوية اجد الباقية فبحسب برهان الشكل المقدّم الزائد فى كو مِن ا فان ضلع اد مساو لضلع اه وقد كُنّا بيّنّا ان بد مثل جه فخط با مثل خط جا باسره فساق اب مثل ساق اج وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل السابع والعشرون مِن المقالة الاولى

اذا وقع خط (ع) مستقيم على خطين مستقيمين فصيّر الزاويتين المتبادلتين متساويتين فان الخطين (ط) متوازيان مثاله ان خط هز وقع على خطى اب جد فصيّر زاويتى احط حطد المتبادلتين متساويتين فاقول ان خطى اب جد متوازيان برهانه انهما ان لم يكونا متوازيين فانهما اذا أُخرِجا فى احدى الجهتين التقيا فنخرجهما فى جهة بد فيلتقيان على نقطة ك ان امكن ذلك فتصير

Exemplificatio. Trianguli ABG angulus ABG aequalis sit angulo AGB. Dico, esse $AB = AG$.

Demonstratio. BD, GE inter se aequales abscindimus, et duas lineas BE, GD ducimus. Quare duo latera DB, BG duobus lateribus EG, GB aequalia sunt. Et $\angle DBG = \angle BGE$. Ex I, 4 igitur basis DG basi EB aequalis erit et $\angle GBE = \angle BGD$ et $\angle BDG = \angle BEG$. Et e demonstratione ad I, 26 addita angulus qui relinquitur AEB aequalis est angulo qui relinquitur ADG, et $AB = AG$.*) Iam rursus angulus qui relinquitur ABE angulo qui relinquitur AGD aequalis est. Itaque ex demonstratione propositionis praecedentis ad I, 26 additae latus A lateri AE aequale erit. Iam autem demonstrauimus, BD aequale GE esse. Ergo linea BA aequalis est toti lineae GA, et crus AB cruri AG aequale. Q. n. e. d.

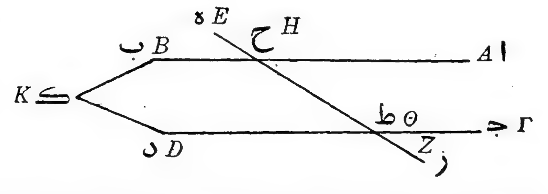


Propositio XXVII libri primi.

Si recta in duas rectas inciderit ita, ut angulos alternos inter se aequales efficiat, rectae inter se parallelae erunt.

Exemplificatio. EZ in duas lineas AB, GD ita incidat, ut duos angulos alternos $AH\Theta$, $H\Theta D$ inter se aequales efficiat. Dico, lineas AB, GD inter se parallelas esse.

Demonstratio. Si inter se parallelae non sunt, ad alterutram partem productae concurrent. Itaque ad partes B, D eas producimus, donec, si fieri potest, in puncto K concurrant. In triangulo igitur $H\Theta K$ angulus $AH\Theta$ extrinsecus positus maior erit angulo $H\Theta K$ intra posito, ita ut in I, 16 demonstrauimus. Quod absurdum est, quia supposuimus,



*) Dicendum erat: quia $BDG = BEG$, erit $AEB = ADG$. Et BAG communis est, et $EB = DG$. Ergo ex I, 26 erit $AB = AG$. Quae sequuntur, idem alio modo demonstrant (quia $ABG = AGB$ et $GBE = BGD$, erit $AGD = ABE$. Et $\angle BAG$ communis est, et $EB = DG$ cet.).

زاوية احط الخارجة مِن مثلث حطك اعظم مِن زاوية حطك الداخلة كما بيّن ببرهان يو مِن ا وهذا خلف لان زاوية احط فرضت مساوية لزاوية حطد فخطا اب جد ان اخرجا فى الجهتين جميعا لم يلتقيا ولو خُرِجَا الى غير نهاية فهما متوازيان وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

15 u.

الشكل الثامن والعشرون من المقالة الاولى

اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين(ع)فصيّر الزاوية(ع) الخارجة مثل الداخلة التى تُقابلها او صيّر(ع) الزاويتين اللتين فى جهة واحدة الداخلتين معادلتين لقائمتين فان الخطين متوازيان(ط) مثاله ان خط هز وقع على خطى اب جد فصيّر هحب الخارجة مثل زاوية حطد الداخلة التى تقابَلَها او صيّر مجموع زاويتى بحط دطح مساويًا لمجموع زاويتين قائمتين فاقول ان خطى اب جد متوازيان برهانه ان زاوية هحب مساوية لزاوية حطد ولكن زاوية هحب مساوية لزاوية احط وذلك بحسب برهان يه مِن ا والمساوية لشى واحد فهى متساوية فزاوية احط مساوية لزاوية حطد وهما المتبادلتان فبحسب برهان كز مِن ا يكون خط اب موازيًا لخط جد ∴ وايضا فليكن مجموع زاويتى بحط حطد الداخلتين اللتين فى جهة واحدة مساويًا لمجموع زاويتين قائمتين فاقول ان خط اب موازٍ لخط جد برهانه ان [مجـ]وع زاويتى بحط حطد معادلتان لقائمتين وكذلك بحسب برهان يج من ا يكون مجموع زاويتى احط بحط معادلتين لزاويتين قائمتين فزاويتا احط بحط مثل زاويتى بحط حطد فنُسقط زاوية بحط المشتركة فتبقى زاويتا

angulum $AH\Theta$ angulo $H\Theta D$ aequalem esse. Itaque duae lineae AB, GD non concurrunt, si ad utramque partem simul producuntur, etiamsi in infinitum producuntur. Ergo parallelae sunt. Q. n. e. d.

Propositio XXVIII libri primi.

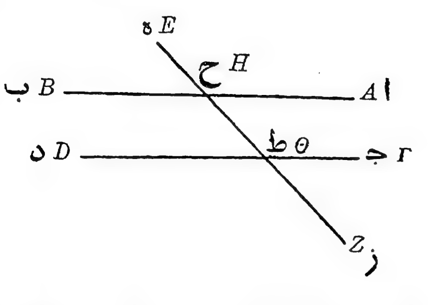
Si recta in duas rectas inciderit ita, ut uel angulum exteriorem angulo interiori et opposito aequalem uel angulos interiores ad eamdem partem positos duobus rectis aequales efficiat, lineae inter se parallelae erunt.

Exemplificatio. Linea EZ in duas lineas AB, GD ita incidat, ut angulum EHB exteriorem angulo $H\Theta D$ interiori et opposito aequalem uel summam angulorum $BH\Theta$, $D\Theta H$ summae duorum angulorum rectorum aequalem efficiat. Dico, lineas AB, GD inter se parallelas esse.

Demonstratio. Angulus EHB angulo $H\Theta D$ aequalis est. Sed angulus EHB ex I, 15 angulo $AH\Theta$ aequalis est. Et quae eidem aequalia sunt, inter se sunt aequalia; itaque angulus $AH\Theta$ angulo $H\Theta D$ aequalis erit. Sunt autem alterni. Ergo ex I, 27 linea AB lineae GD parallela est.

Rursus summa duorum angulorum interiorum ad eandem partem positorum $BH\Theta$, $H\Theta D$ summae duorum rectorum aequalis sit. Dico, lineam AB lineae GD parallelam esse.

Demonstratio. Summa duorum angulorum $BH\Theta$, $H\Theta D$ duobus rectis aequalis est, et ex I, 13 summa duorum angulorum $AH\Theta$, $BH\Theta$ et ipsa duobus rectis aequalis est. Quare $\angle AH\Theta + BH\Theta = \angle BH\Theta + H\Theta D$. Subtracto angulo communi $BH\Theta$ relinquuntur anguli $AH\Theta$, $H\Theta D$ aequales. Sunt autem alterni. Ergo linea AB lineae GD parallela est. Q. n. e. d.



احط حطد المتبادلتان مساويتين لخط اب موازٍ لخط جد وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ مقدمات واشكال يُحتاج اليها فى الشكل التاسع والعشرين مِن المقالة الاولى لسنبليقيوس واغانيس ان المقدمة[1] المستعملة فى برهان الشكل التاسع والعشرين مِن المقالة الاولى وهى انّ كل خطين يخرجان على اقلّ مِن زاويتين قائمتين فانهما يلتقيان ليست مِن القضايا المقبولة قال سنبليقيوس فى ذلك ان هذه المصادرة ليست بظاهرة كلّ ذلك لكنه قد احتيج فيها الى بيانٍ بالخطوط حتى ان اَبطينياطوُس وذيُوذرس بيّناه باشكال كثيرة مختلفة وبطلميوُس ايضا قد عَمِل بيانه والبرهانَ عليه واستعمل فى ذلك الشكل الثالث عشر والخامس عشر والسادس عشر مِن المقاله الاولى مِن الاسطقسات وذلك ليس بمُنكرٍ لانّ اوقليدس انما استعمل هذه المصادرة فى الشكل التاسع والعشرين مِن هذه المقالة وقد كان هذا المعنى فى نفسه ايضًا مستحقًا للنظرِ والقولِ فيه وان نُبيّن اَنّهُ كما انّ الخطين اذا اُخرجَا على زاويتين قائمتين كانا متوازيين كذلك اذا اخرجا على اقل مِن زاويتين قائمتين كانا متلاقيين ∴ فاما اغانيس صاحبنا فانّه لم يرَ ان يتقدّم فيستعمل هذا المعنى على انه مصادرة اذ كان يُحتاج الى برهان[2] لكنّه استعمل اشكالاً اُخر مكان الاشكال التى فى الاُسطقسات حتى برهنَ الشكل التاسع والعشرين مِن غير ان جعل هذا المعنى مُصادرةً ثُمّ برهنَ هذه المصادرة بعد

---

[1]) In margine: القضيّة

[2]) In codice: هانٍ (in الى correctum) اليها

Prolegomena et propositiones, quae Simplicio et Gemino auctoribus in propositione XXIX libri primi opus sunt. Enuntiatio praemissa*), quae est: »duae lineae quaelibet, quae ad angulos duobus rectis minores ducuntur, concurrent«, id quod in prop. XXIX libri primi adhibetur, sententiis adceptis adnumerari non potest**).

Simplicius de hac re dixit, hoc postulatum non prorsus manifestum esse, sed ei explicatione per lineas opus esse, ideoque iam Abthiniatum[1]) et Diodorum multis uariisque modis id demonstrasse, et Ptolemaeum***) quoque explicasse et demonstrasse et in hac re propositiones XIII, XV, XVI libri primi Elementorum adhibuisse†). Nec hoc ideo improbandum, quod Euclides in sola prop. XXIX huius libri hoc postulato usus est††). Et per se quoque haec notio digna erat, quae examinaretur et exponeretur, etiamsi demonstratum esset, lineas duas, sicut ad duos rectos angulos ductae parallelae sint, ita ad angulos duobus rectis minores ductas concurrere.

Quod ad Geminum magistrum nostrum adtinet, is non concedit, hanc notionem per se intellegi posse, ita ut tamquam postulatum usurpari possit, quoniam demonstratione egeat. Sed pro propositionibus, quae in Elementis sunt, aliis usus est propositionibus, ita ut propositionem XXIX demonstraret hac notione

---

*) Postulatum 5.

**) Cfr. Proclus p. 193, 1 sq., p. 364, 13 sq.

[1]) Cfr. p. 25. Mea culpa factum est, ut Henricus Suter u. d. (Zeit. für Math. und Physik, 1893 p. 149, n.) jure miraretur, quod l. l. »s »Arabicum litteris« ni« transscripsi. Iam ibi adnotare debui, signum ـسـ imaginem modo scripturae codicis efficere, et scriptorem codicis aperte uerbum non intellexisse. Hic uerbum multo melius scripsit; et nunc credo et hic et l. l. Abthiniathus legendum esse.

***) Proclus p. 191, 23; p. 365, 5 sq.

†) Cfr. Proclus p. 365, 10: *πολλὰ προλαβὼν τῶν μέχρι τοῦδε τοῦ θεωρήματος ὑπὸ τοῦ στοιχειωτοῦ προαποδεδειγμένων.* Ceterum in demonstrationibus Ptolemaei a Proclo p. 365 adlatis solae propp. XIII (p. 367, 21) et XVI (p. 367, 23) usurpantur.

††) Cfr. Proclus p. 364, 13 (ad prop. XXIX): *ἐν δὲ τούτῳ τῷ θεωρήματι πρῶτον ὁ στοιχειωτὴς ἐχρήσατο τούτῳ τῶν αἰτημάτων.*

ذلك بمذاهب وسُبُلٍ هندسيةٍ وهذا كلامُه بالفاظِهِ قال اغانيس
ومِن اجل انّا كنا قصدنا ان نبيّن ان المصادرة على ان الخطين
اللذين يخرجان على اقل مِن زاويتين قائمتين يلتقيان قد تَصِحّ
ببرهانٍ هندسيٍ اذ كان فيها طعنٌ يُطعَن به قديمًا على
المهندسينَ ويُقال لهمْ انكم تطلبُون ان يُسلّم لكم ما ليسَ بِبيّنٍ 16 r.
فتُبَيّنون به الاشياءَ الأُخرَ فانّا نفعلُ ذلك ولعلّ هذا المعنى عظيمٌ
جليل القَدرِ وانَا اَرى انه لا يَحتاج الى كلامٍ طويلٍ ولا ذى فنون
فاقول انّا حددنا الخطوطَ المتوازية بان قُلنا انها التى فى سطحٍ
واحدٍ واذا أُخرجَت اخراجًا دائمًا غير متناهٍ فى الجهتين جميعًا
كان البُعدُ بينهما ابدًا بُعدًا واحدًا والبُعدُ بينهما هو اقصَرُ خطٍ
يَصِل بينهما كما قيل ذلك ايضًا فى الابعادِ الأُخر فينبغى ان تُزادَ
هذه الاشكال فى المقالة الاولى مِن (كتاب الاولى مِن)[1] كتاب
الاصُول بعد الشكل السادس والعشرين حتى يصير هذا الشكل
السابع والعشرين وهو اذا كان خطان مستقيما[ن] متوازيين فان
البُعد بينهما هو عمودٌ على كل واحد منهما مثالُه انا نفرِض خطين
متوازيين وهمَا اب جد وليكن البعد بينهما هز فاقول ان خطّ هز
عمودٌ على كل واحد مِن خطى اب جد برهانه انه ان لم يكن
عمودًا عليهما فلتكن الزاويتان اللتان عند نقطة ه ليستا
بقائمتين ولتكن الحادة منهما زاوية[زه]ا ولنُخرج مِن نقطة ز عمودًا
على خط اب وهو زح وذلك انه يقع فى جهة ا فبحسب برهان يط
مِن ا يكون زه اطولَ مِن زح وقد كان زه فُرِض اقصر خطٍ

[1]) Uerba praue addita.

pro postulato non usus, postea uero hoc postulatum mathematica ratione et more demonstrauit. Haec sunt ipsa eius uerba:

Geminus dixit: Quoniam nobis propositum est, ut demonstremus ratione geometrica constare postulatum, quod est: »duae lineae, quae ad eam partem producuntur, ubi anguli duobus rectis minores sunt, concurrent« (est enim inter ea, quae homines iam antiquitus geometris obiectauerunt dicentes: uultis, res non demonstratas uobis ita constare, ut per eas alia demonstretis), hoc faciemus. Notio illa quidem grauior est magnique momenti; sed tamen crediderim neque longiore explicatione eam egere neque artificiis opus esse.

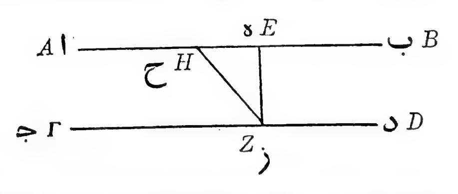
Dico, nos lineas parallelas definiuisse dicentes, eas in eodem plano positas esse, et distantiam inter eas, si in utramque partem semper in infinitum producantur, semper eandem manere[1]), et eam esse breuissimam lineam inter eas ductam eodem modo, quo hoc de aliis quoque distantiis dicitur[2]).

Tum in libro primo Elementorum post propositionem uigesimam sextam hae propositiones addendae sunt, ita ut fiat uigesima septima propositio, quae est:

Si duae rectae parallelae sunt, distantia inter eas perpendicularis est ad utramque[3]).

Exemplificatio. Supponimus duas lineas AB, GD parallelas. Et distantia inter eas sit EZ. Dico, lineam EZ ad utramque lineam AB, GD perpendicularem esse.

Demonstratio. Si ad eas perpendicularis non est, duo anguli ad punctum E duo recti non sunt. Iam angulus $[ZE]A$ acutus sit, et a puncto Z ducamus ZH ad lineam AB perpendicularem; ea igitur ad partes A uersus cadit. Et ex I, 19 longior est ZE



1) Cfr. p. 9.
2) Cfr. p. 11.
3) Cfr. p. 9.

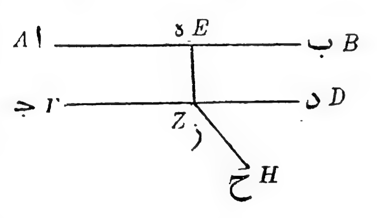
مستقيم يقع بين خطى اب جد هذا خلف فاذن خط هز عمود على كل واحد مِن خطى اب جد وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ شكل ثانٍ لِاغانيس اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فكان عمُودًا على كل واحد منهما فان الخطين متوازيان والعمودُ هو البُعد الذى بينهما مثاله ان خطى اب جد قد وقع عليهما خط هز فاحاط مع كل واحد منهما بزاويتين قائمتين فاقول ان خطى اب جد متوازيان وان خط هز هو البُعد بينهما برهانه انهما ان لم يكونا متوازيين فانا نُجيز على نقطة ز خطًا موازيًا لخط اب وليكن ان امكن خط زح ونُنزل ان الخط المُوازىَ لخط اب هو خط زح فخط هز اذن يَجبُ ان يكون البعد بين خط اب وخط زح لانه اقصرُ الخطوطِ التى تخرج مِن نقطة ز الى خط اب فزاوية حزه قائمةٌ وذلك بحسب برهان الشكل المتقدّم ولكن زاوية دزه فُرضت قائمة هذا خلف فاذن خطا اب جد متوازيان وخط زه هو البُعد بينهما وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ شكل ثالث لِاغانيس الخط المستقيم المُخرجُ على الخطوط المتوازية يُصيّر الزوايا المتبادلةَ متساوية ويصيّر الزاوية الخارجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة لها ويُصيّر الزاويتين اللتين فى جهة واحدة مساويتين لمجموع زاويتين قائمتين مثاله انا نُخرج على خطى اب جد المتوازيين خطًا مستقيما عليه هز فاقول ان الزوايا التى حدثت على ما حددنا برهانه انا نُخرج مِن كل واحد مِن نقطتى هز البُعدَ الذى بين خطى اب جد وهما خطا هط زك فتكون الاربع الزوايا التى حدثت عنهما قائمةً فخط هط موازٍ لخط كز وذلك بحسب برهان الشكل

quam ZH. Supposuimus autem, ZE breuissimam esse lineam rectam, quae inter duas lineas AB, GD cadat. Quod absurdum est. Ergo linea EZ ad utramque lineam AB, GD perpendicularis est. Q. n. e. d.

Propositio secunda Gemini. Si linea recta in duas lineas rectas ita cadit, ut ad utramque perpendicularis sit, lineae parallelae erunt, et linea perpendicularis distantia inter eas erit.

Exemplificatio. In duas lineas AB, GD linea EZ ita cadit, ut cum utraque angulum rectum comprehendat. Dico, duas lineas AB, GD inter se parallelas et lineam EZ distantiam inter eas esse.

Demonstratio. Si inter se parallelae non sunt, per punctum Z lineam lineae AB parallelam ducimus, quae, si fieri potest, sit linea ZH. Supponimus igitur, lineam lineae AB parallelam esse ZH. Itaque necesse est, lineam EZ distantiam esse inter lineas AB et ZH, quia breuissima est linea, quae a puncto Z ad lineam AB duci possit. Angulus igitur HZE ex propositione praecedenti rectus erit; supposuimus autem, $\angle DZE$ rectum esse. Quod absurdum est. Ergo duae lineae AB, GD inter se parallelae sunt, et linea ZE distantia est inter eas. Q. n. e. d.



Propositio tertia Gemini. Si linea recta in lineas inter se parallelas ducitur, anguli alterni inter se aequales fiunt, et angulus exterior angulo interiori et opposito fit aequalis, et praeterea efficitur, ut anguli ad eandem partem positi duobus rectis aequales fiant.

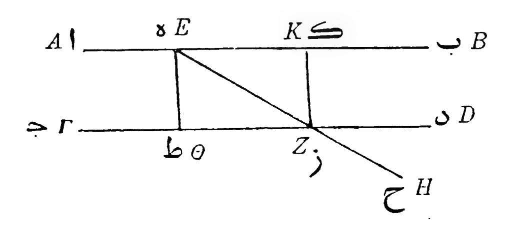
Exemplificatio. In duas lineas AB, GD inter se parallelas lineam rectam EZ ducimus. Dico, angulos, qui exsistant, se habere ita, ut dictum sit.

Demonstratio. Ab utroque puncto E, Z distantias inter duas lineas AB, GD ducimus, scilicet $E\Theta$, ZK, ita ut quattuor

المتقدّم وخط هك موازٍ لخط طز وخطا هط كز[1] هما البُعد بينهما
فهما اذًا متساويان ومِن اجل ان خط طز مساوٍ لخط هك وخط هط
مساوٍ لخط زك وهذه الخطوط تحيط بزوايا متساوية فان المثلثين
متساويان وباقى الزوايا مساوية لباقى الزوايا فزاوية طزه مساوية
لزاوية زهك وهما متبادلتان ولتكن زاوية طزه مساوية لزاوية حزد 16 u.
لانهما على التقاطع وذلك بحسب برهان يه مِن ا فزاوية زهك
مساوية لزاوية حزد الخارجة للداخلة المقابلة لها وايضًا فمن اجل
ما بيّنا ان الزوايا المتبادلة متساوية فانا نزيد زاوية دزه مشتركة
فتكون زاويتا طزه هزد اللتين هما مساويتان لِقائمتين مساويتين
لزاويتى كهز دزه فاذن الزاويتان اللتان فى جهةٍ واحدة مساويتان
لقائمتين وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ شكل رابع لِاغانيس اذا
أُخرج خط مستقيم على خطين مستقيمين فكانت الزاويتان
المتبادلتان اللتان احاط بهما مع الخطين متساويتين او كانت
الزاوية الخارِجة مساوية للزاوية الداخلة المقابلة لها او كانت
الزاويتان الداخلتان اللتان فى جهة واحدة مساويتين لقائمتين
فان الخطين متوازيان مثاله ان خطى اب جد وقع عليهما خط هز
فاحاط معهما [بزو]ايا على ما حددنا فاقول ان خطى اب جد
متوازيان ∴ برهانه انه ان كان خط هز عمودًا فظاهِرٌ ان خطى
اب جد متوازيان لما قيل فى الشكل الثانى مِن هذه الاشكال
الزائدة وان لم يكن خط هز عمودًا فانا نُخرِج مِن نقطة ه الى

[1]) In codice: هك طز

anguli, qui ad eos exsistunt, recti fiant. Linea $E\Theta$ igitur lineae KZ parallela erit, quod ex propositione praecedenti sequitur. Est autem linea EK lineae ΘZ parallela; et duae lineae $E\Theta$, KZ distantiae inter illas sunt; itaque inter se aequales sunt. Quoniam igitur $\Theta Z = EK$ et $E\Theta = ZK$, et hae lineae angulos inter se aequales comprehendunt, duo trianguli inter se aequales erunt, et anguli reliqui angulis reliquis aequales erunt. Ergo angulus ΘZE angulo ZEK aequalis est, qui alterni sunt. Et angulus ΘZE ex I, 15 angulo HZD aequalis est, quoniam ad sectionem linearum positi sunt. Ergo angulus ZEK angulo HZD aequalis, exterior interiori et opposito aequalis. Rursus quoniam iam demonstrauimus, angulos alternos inter se aequales esse, communi addito angulo DZE anguli ΘZE, EZD, qui duobus rectis aequales sunt, angulis KEZ, DZE aequales sunt. Ergo duo anguli, qui ad eandem partem positi sunt, duobus rectis aequales sunt. Q. n. e. d.



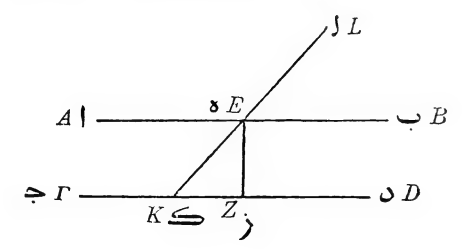
Propositio quarta Gemini. Si linea recta ad duas lineas rectas ducitur ita, ut aut duo anguli alterni, quos illa cum duabus lineis comprehendit, inter se aequales sint, aut angulus exterior angulo interiori et opposito aequalis sit, aut duo anguli interiores ad eandem partem positi duobus rectis aequales sint, duae illae lineae inter se parallelae erunt.

Exemplificatio. In duas lineas AB, GD linea EZ ita cadit, ut cum iis angulos eius modi, quales descripsimus, comprehendat. Dico, duas lineas AB, GD inter se parallelas esse.

Demonstratio. Si linea EZ [ad utramque] perpendicularis est, ex eo, quod in propositione secunda propositionum additarum dictum est, manifestum erit, duas lineas AB, GD

خط جدَ عمود هكَ فان كانت زاوية هَ قائمة فظاهرٌ ايضًا ان خطى
ابَ جدَ متوازيان لما قيل فى الشكل الثانى مِن هذه الاشكال
الزائدة وان لم تكن زاوية هَ قائمة فانا نخرج مِن نقطة هَ عمودًا
على خط هكَ كما بيّن ببرهان يا مِن ا وليكن عمود هلَ فيكون
خطا هلَ جدَ متوازيين فزاويتاهما المتبادلتان متساويتان وذلك
كما بيّن فى الشكل الثالث مِن هذه الاشكال الزائدة فاذن
كل واحدة مِن زاويتى زهب زهل مساوية لزاوية جزهَ وذلك غيرُ
ممكن فخطا ابَ جدَ متوازيان وذلك ما اردنا ان نبيّن وبحسب
اوضاع اغانيس فانه قال ويصيّر الشكل الحادى والثلثون نُريد ان
نخرج مِن نقطة مفروضةٍ خطًا موازيًا لخطٍ مفروضٍ والشكل الثانى
والثلثون السطوح المتوازية الاضلاع اضلاعها المتقابلة متساوية
والشكل الثالث والثلثون الخطوط الموازية لخط واحد هى متوازية
والربع والثلثون الخطوط المستقيمة التى تصل بين الخطوط المتساوية
المتوازية هى متساوية متوازية والخامس والثلثون اذا وقع خطٌ
مستقيم على خطين مستقيمين فكانت الزاويتان الداخلتان
اللتان فى جهة واحدة اصغر مِن قائمتين فان الخطين اذا أُخرجَا
فى جهة الزاويتين التين هما اقل مِن قائمتين التقيا مثالهَ ان
خطى ابَ جدَ المستقيمين وقع عليهما خط هزَ المستقيم فصارت
الزاويتان اللتان فى خهة بدَ اصغر مِن قائمتين فاقولَ ان خطى
ابَ جدَ يلتقيان فى تلك الجهة برهانهَ انا نُجيزُ على نقطة زَ خطاً
موازيًا لخط ابَ كما بُيّن اخراجُه ببرهان اوقليدس فى لا مِن
ا وليكن خط زحَ ونُخرج البُعد بينهما بحسب برهان يا مِن ا

inter se parallelas esse. Sin linea EZ perpendicularis non est, a puncto E ad lineam GD lineam EK perpendicularem ducimus. Iam si angulus E rectus est, sic quoque ex eo, quod in propositione secunda propositionum additarum dictum est, manifestum, duas lineas AB, GD inter se parallelas esse. Sin angulus E' rectus non est, a puncto E ad lineam EK lineam perpendicularem ducimus, ita ut in I, 11 demonstratum est, quae sit EL. Quare duae lineae EL, GD inter se parallelae et anguli alterni inter se aequales erunt, sicut in propositione tertia propositionum additarum demonstratum est. Itaque uterque angulus ZEB, ZEL angulo GZE aequalis est. Quod fieri non potest. Ergo duae lineae AB, GD inter se parallelae sunt. Q. n. e. d.



His rationibus Geminus dicit ostendi etiam propositiones XXXI*) (a puncto dato linea datae lineae parallela ducenda est) et XXXII (in spatiis, quorum latera parallela sunt, latera inter se opposita aequalia sunt) et XXXIII (lineae eidem lineae parallelae inter se parallelae sunt) et XXXIV (lineae rectae, quae lineas inter se aequales et parallelas coniungunt, inter se aequales et parallelae sunt) et XXXV (si linea recta in duas lineas rectas ita incidit, ut anguli interiores, qui ad eandem partem positi sunt, duobus rectis minores sint, duae illae lineae in eam partem productae, in qua duo anguli duobus rectis minores positi sunt, concurrent).

Exemplificatio. In duas lineas rectas AB, GD recta linea EZ ita incidit, ut duo anguli ad partes B, D positi duobus rectis

*) Scilicet ex dispositione Gemini, qui post Euclidis prop. XXVI quattuor illas propositiones interposuit (u. supra p. 121). Propositiones XXXI—XXXIV Gemini apud Euclidem sunt XXXI, XXXIV, XXX, XXXIII.

وهو خط زه ونفرض على خط زد نقطة كيف ما وقعت ولتكن
نقطة ط ونُخرج مِن نقطة ط عمودًا على خط زه كما بيّن ببرهان 17 r.
يا مِن ا وليكن خط طى ونقسم خط زه بنصفين كما بيّن
ببرهان ي مِن ا ونقسم ايضا نصفه بنصفين و لا نزال نفعل ذلك
دائمًا حتى تقع القسمة دون نقطة ى فلتقع القِسمَة على نقطة م
فمِن البيّن ان نقطة م يقع على قسم يُنطقُ به مِن خط هز
فلننزل ان القسم الذى يقع دون نقطة ى هو رُبع زه مثلاً ولنُجِزْ
على نقطة م خطًا موازيًا لخطى زح اب وهو خط من كما بيّن
ببرهان لا مِن ا ونخرج خط زد اخراجًا غير محدود ونجعل فى زق
مِن اضعاف زن كاضعاف هز لمقدار زم وهو اربعة اضعافٍ فاقول ان
خطى اب جد يلتقيان على نقطة ق برهان ذلك انا نفصِل مِن
خط زق خطا مساويا لخط زن كما بُيّن ببرهان ج مِن ا وليكن
خط نس ونخرج على نقطة س خطا موازيا لخط زه وهو خط س ش
ونخرج خط من الى نقطة ع فيكون مثلثا زمن نسع ضلعان مِن
اضلاعهما متساويان وهما زن [ن]س وزاوية زنم مساوية لزاوية
عنس وذلك بيّن ببرهان يه مِن ا وببرهان الشكل الثالث
الموضوع مِن اوضاع اغاذيس مِن هذه المقدمات تكون زاوية
مزن مساوية لزاوية نسع لانهما المتبادلتان فبحسب برهان كو
مِن ا يكون باقى الاضلاع مثل باقى الاضلاع كل ضلع مساوٍ
لنظيره والزاوية الخارجة مساوية للزاوية الباقية فضلع زم مثل ضلع
سع وضلع عش مثل ضلع زم لانه مقابل له فى سطح متوازى
الاضلاع فخط س ش ضعف خط زم فان اخرجنا مِن نقطة ق خطا

minores sint. Dico, duas lineas AB, GD in hanc partem concurrere.

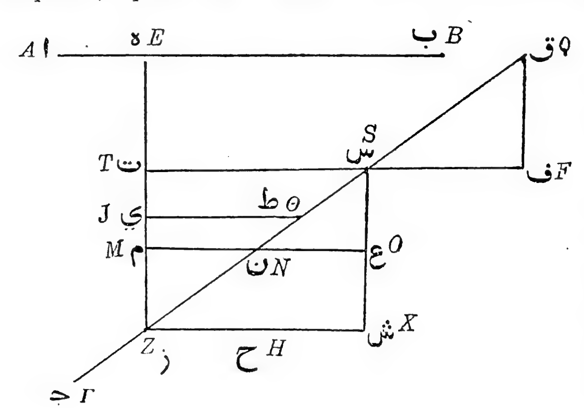
Demonstratio. Per punctum Z lineam lineae AB parallelam ducimus ita, ut Euclides in I, 31 demonstrauit, quae linea sit ZH. Et ex I, 11 distantiam inter eas lineam ZE ducimus. In linea ZD punctum quodlibet datum sit Θ, et a puncto Θ ex I, 11 lineam ΘI ad lineam ZE perpendicularem ducimus. Linea ZE ex I, 10 in duas partes aequales diuisa rursus partem dimidiam in duas partes aequales diuidimus, et hoc semper deinceps facimus, donec punctum diuisionis infra punctum I cadat. Cadat hoc punctum in puncto M. Itaque manifestum est, punctum M in partem rationalem lineae EZ cadere. Supponamus partem, quae infra I cadat, esse ut partem quartam, et ex I, 31 per punctum M lineam MN lineis ZH, AB parallelam ducamus. Linea ZD in infinitum producta ZQ in partes aequales lineae ZN diuidimus eodem modo, quo lineam EZ in partes lineae ZM aequales diuisimus, quae sunt partes quattuor. Dico, lineas AB, GD in punctum Q concurrere.

Demonstratio. A linea ZQ ex I, 3 linea NS lineae ZN aequali abscisa per punctum S lineae ZE parallelam ducimus SX et lineam MN ad punctum O producimus. Itaque in duobus triangulis ZNM, NSO duo latera ZN, $[N]S$ inter se aequalia sunt. Est autem angulus ZNM angulo ONS aequalis, quod in I, 15 demonstratum est. Et ex propositione tertia a Gemino in prolegomenis suis supra*) exposita angulus MZN angulo NSO aequalis est, quia anguli alterni sunt. Itaque ex I, 26 reliqua latera reliquis lateribus, alterum alteri, aequalia sunt, et angulus extrinsecus positus [scr. reliquus] angulo reliquo aequalis; quare $ZM = SO$. Uerum OX lateri ZM aequale est, quia in spatio, cuius latera parallela sunt, ei oppositum est; linea SX igitur linea ZM duplo maior est. Iam a puncto Q lineam duabus lineis EZ, SX parallelam ducimus, et per punctum S lineam TS in directum

*) P. 123.

موازيًا لخطى هز سش واجزنا على نقطة س خط تس على استقامة
يُوازى خط اب ويلقى الخط المخرج مِن نقطة ق الموازى لخط هز
فبيّن انه نفصل منه خطًا مساويًا لخط زت فلنخرجْهُ وليكن خط
فق فيكون خط فق مساويًا لخط تز لان سق مثل سز وزاوية
تسز مثل زاوية قسف وزاوية فقس مثل زاوية تزس المتبادلتان
فبحسب بُرهان كو مِن ا يكون فق مثل زت لكن زت مثل
ته فخط فق مثل ته فخط اهب يلقى خط فق على نقطة ق
وذلك بحسب ما رتّب اغانيس فى موضع الشكل الذى يقول انّ
الخطوط التى تصل بين اطراف الخطوط المتساوية المتوازية هى
متوازية متساوية فقد تبيّن انه اذا وقع خط مستقيم على خطين
مستقيمين فكانت الزاويتان الداخلتان اللتان فى جهة واحدة
اقلَ مِن زاويتين قائمتين فان الخطين اذا اخرجا فى جهة الزاويتين
اللتين هما اقل مِن قائمتين التقيا وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴
كل ما وَصَفَهُ فى هذا الشكل و فى مقدماته التى تقدّمها فهى
مقبولة قبولَ اضطرار بحسب مصادرة المقالة الاولى وبحسب الاشكال
التى رتّبها اغانيس مِن الاشكال التى زادها مِن عنده مع
اشكال اوقليدس وليس فى شى مما اتى به موضعٌ للطعن بتّةً
قال سنبليقيوس فهذا كلامُ اغانيس بالفاظه ولعلّ اوقليدس انما 17 u.
استعمل هذا المعنى فى المصادرات على انّه اقربُ ماخذًا مِن هذا
الماخذ وذلك انه ان كانت الخطوطُ المتوازية هى التى فى سطح
واحد واذا اخرجت فى الجهتين جميعًا اخراجًا دائمًا كان البعد
بينهما ابدًا متساويًا فان هذا القول اذا عُكِس كان عكسُه حقًا

producimus, quae parallela erit lineae AB et lineam a puncto Q lineae EZ parallelam ductam secat. Demonstratum est igitur, ab ea lineam lineae ZT aequalem abscisam esse. Eam ducamus, sitque linea FQ. Linea enim FQ lineae TZ aequalis est, quia $SQ = SZ$, $\angle TSZ = \angle QSF$ et $\angle FQS$ angulo TZS aequalis, quia anguli alterni sunt. Itaque ex I, 26 est $FQ = ZT$. Uerum $ZT = TE$; quare $FQ = TE$, et linea AEB in puncto Q cum linea FQ concurrit. Hoc enim ex dispositione Gemini ex ea propositione sequitur, quae est: lineae, quae terminos linearum inter se aequalium et parallelarum conjungunt, et ipsae inter se parallelae et aequales sunt.*) Ergo iam demonstratum est, si recta in duas rectas ita incidat, ut anguli interiores ad eandem partem positi duobus rectis minores sint, duas illas rectas in eam partem productas, ubi anguli duobus rectis minores positi sint, concurrere. Q. n. e. d.



Omnia, quae scripsit in hac propositione et in iis, quae praemittuntur, omnino probanda sunt ex initio libri primi et ex propositionibus, quas Geminus disposuit de suo adiectas una cum propositionibus Euclidis, nec in iis, quae exposuit, locus obloquendi ullus omnino relictus est.

Simplicius dixit: Haec uerba ipsa Gemini. Fortasse autem Euclides hanc notionem ideo tantum inter postulata posuit, quod a principiis propius abest quam illa. Si enim parallelae lineae eae sunt, quae in eodem plano po-

*) Gemini prop. XXXIV (supra p. 127.) = Eucl. I, 33.

وهو ان الخطوط التى فى سطح واحد اذا لم يكن البعدُ بينهما متساويًا فليست متوازيةً واذا لم تكن متوازية فهى متلاقية فان اوقليدس استعمل هذا المعنى فى هذا الشكل كانّها مِن القضايا الواجب قبولُها والخطوط التى تخرجُ على اقل مِن زاويتين قائمتين ليس تحفظ بُعدًا واحدًا فهى اذن متلاقية وظاهرٌ انّ تلاقِيَها تكون فى جهة ميل احدِهما الى الاخر فان الجهة الاخرى ينفرجان فيها ويتّسِعان ويتزيّدُ البعد بينهما ولكن من اجل انّ القولَ بان الخطين اذا لم يكونا متوازيين فهما يلتقيان يحتاج الى [ان] يُقوَّى ويُبيَّن وايضًا لانّ قطوع المخروطات ليست متوازيةً وهى لا يلتقى ذكرَ اغانيس تلك المقدّمة واستعمل هذه الاشكال وايضا فان هذا ال[معن]ى هو عكسُ الشكل الذى يقال فيه ان الخطين المستقيمين اللذين اذا وَقعَ عليهما خط مستقيم كانت الزاويتان الداخلتان معادلتين لقائمتين فهما متوازيان فإذ كان هذا الشكل قد بيّن ببرهان فهذا المعنى ايضًا يحتاج [الى] ان يُبيَّنَ ببرهانٍ فقد اَحضرنا كل شى يُمكن ان يقال فى الخطوط المتوازية وصُحّ الامرُ فيها ∴

الشكل التاسع والعشرون مِن المقالة الاولى [1]

اذا اُخرج[2] خط (ع) مستقيمٌ على خطين مستقيمين متوازيين فان الزاويتين المتبادلتين متساويتان(ط)والزاويتان(ط)الخارجةُ والداخلةُ

[1]) In margine: هذا عكس السابع والثامن والعشرين: Inuersio est propositionum XXVII et XXVIII.

[2]) In margine: وقع: incidit.

sitae sunt, et quarum distantia, si simul in utramque partem in infinitum producuntur, semper eadem manet, etiam contrarium hac definitione conuersa constabit, si distantia duarum linearum in eodem plano positarum eadem non maneat, eas inter se parallelas non esse et ideo concurrere. Et Euclides in hac propositione hac notione usus est ut ad eas pertinenti, quæ necessario admittendae sunt: lineae, quae ad minus quam duos rectos ducuntur, eandem distantiam non seruant et ideo concurrunt. et adparet, concursum earum ad eam partem uersus fieri, ubi altera ad alteram inclinat, ad alteram uero partem eas inter se longius discedere et remoueri, distantiamque augeri. Sed quoniam enuntiatio illa, duas rectas, si parallelae non sint, concurrere, confirmari et demonstrari debet, et etiam quia [asymptotae et] coni sectiones*) nec inter se parallelae sunt nec concurrunt, Geminus haec praemisit et has propositiones exposuit. Ceterum haec notio conuersio est eius propositionis, quae dicit, si duae rectae a recta ita secentur, ut anguli interiores duobus rectis aequales sint, rectas illas parallelas esse, et quoniam illa propositio demonstratione confirmata est, etiam haec notio demonstratione confirmanda est. Iam omnia exposuimus, quae de lineis parallelis dici possunt, et quae ad eas pertinent, adcurate explicata sunt.

Propositio XXIX libri primi.

Si linea recta in duas lineas rectas inter se parallelas ducitur, duo anguli alterni inter se aequales sunt, et anguli oppositi, exterior et interior, inter se æquales sunt, et summa duorum angulorum interiorum ad alterutram partem positorum duobus rectis aequalis est.

Exemplificatio. Duae lineae AB, GD inter se parallelae sunt, et in eas ducta est linea recta ZE. Dico, duos angulos alternos $AH\Theta$, $H\Theta D$ inter se aequales esse, et duos angulos

*) Cfr. Proclus p. 177, 15 sq.

التى تُقابلُها متساويتان والزاويتان (ط) الداخلتان فى اى الجهتين كانتا فان مجموعَهما يعدلُ مجموعَ زاويتين قائمتين مثاله ان خطى اب جد متوازيان وقد أُخرج عليهما خط مستقيم وهو زه فاقول ان زاويتى احط حطد المتبادلتين متساويتان وان زاويتى هحب حطد الخارجة والداخلة المتقابلتين متساويتان وانّ مجموع زاويتى بحط حطد الداخلتين اللتين فى جهة واحدة معادلتان لمجموع زاويتين قائمتين برهانه انا نبيّن اولاً ان زاوية احط مساوية لزاوية حطد المتبادلتين فان لم يكن مثلها فاحداهما اعظم فلتكُن زاوية احط اعظم ان كان يمكن ونجعل زاوية بحط مشتركة فمجموع زاويتى احط بحط اعظم مِن مجموع زاويتى بحط حطد لكن بحسب برهان يج مِن ا يكون مجموع زاويتى احط بحط مثل زاويتين قائمتين فمجموع زاويتى[1] بحط حطد اصغرُ مِن مجموع زاويتين قائمتين لكن بحسب ما صادر به اوقليدس[1] وبحسب ما برهن عليه اغانيس فى الاشكال المتقدّمة انه اذا وقع خط مستقيم على خطين مستقيمين فكانت الزاويتان الداخلتان اللتان فى جهة واحدة اقل مِن قائمتين فان الخطين اذا اخرجا فى جهة الزاويتين اللتين هما اقل مِن قائمتين التقيا فخطا اب جد اذن يلتقيان فى جهة نقطتى بد وهما متوازيان فهذا مُحال غير مُمكن فليسَ يُمكن ان تكون زاوية (زاوية) احط اعظم مِن زاوية حطد ولا اصغر منها فهى اِذن مساوية لها فزاوية احط مساوية لزاوية حطد المتبادلتان وايضا فلان خطى اب هز يتقاطعان على نقطة ح (s. ح) فبحسب برهان يه مِن ا تكون زاوية

oppositos EHB, $H\Theta D$, exteriorem et interiorem, inter se aequales esse, et summam duorum angulorum interiorum ad eandem partem positorum $BH\Theta$, $H\Theta D$ summae duorum rectorum angulorum aequalem esse.

Demonstratio. Primum demonstrabimus, angulos alternos aequales esse, $\angle AH\Theta = \angle H\Theta D$. Nam si aequales non sunt, alteruter eorum maior est. Sit angulus $AH\Theta$ maior, si fieri potest. Angulum $BH\Theta$ communem adiicimus. Itaque $AH\Theta + BH\Theta > BH\Theta + H\Theta D$. Uerum ex I, 13 summa duorum angulorum $AH\Theta$, $BH\Theta$ duobus rectis aequalis est; quare etiam summa duorum angulorum $BH\Theta$, $H\Theta D$ minor erit summa duorum rectorum. Sed ex eo, quod postulauit Euclides*), et quod Geminus in propositionibus, quas præmisit, demonstrauit, efficitur, si recta in duas rectas incidente anguli interiores ad alteram partem positi duobus rectis minores sint, duas illas rectas concurrere ad eam partem uersus productas, ubi duo anguli duobus rectis minores sint. Itaque duae lineae AB, GD ad partes duorum punctorum B, D uersus concurrent. At parallelae sunt. Itaque hoc absurdum est neque fieri potest. Ergo fieri non potest, ut angulus $AH\Theta$ angulo $H\Theta D$ maior sit. Uerum ne minor quidem est**). Ergo ei æqualis est, et duo anguli alterni $AH\Theta$, $H\Theta D$ aequales sunt.

Rursus quoniam duae lineae AB, EZ in puncto H inter se

---

[1]) In margine est: قال ايرن يعنى قوله اذا وقع خط مسقيم (على) خطين مستقيمين فصيّم الزاويتين اللتين فى جهة واحدة اصغر مِن قائمتين فان الخطين اذا اخرجا فى تلك الجهة فلا بُدَّ مِن ان يلتقيا ∴

Heron dixit: Significat uerba, quae sunt: Si in duas rectas recta ita inciderit, ut duos angulos ad eandem partem positos duobus rectis minores efficiat, fieri non potest, ut duae illae lineae ad hanc partem productae non concurrant. (Post. 5).

*) Post. 5.

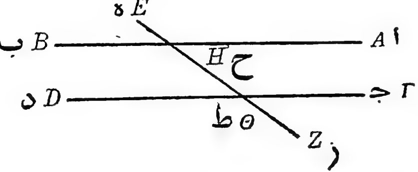
**) Hoc minus adcurate addidit Arabs (u. supra lin. 7: alteruter)

18 r. احـط مساوية لزاوية هحب لكن زاوية احط قد بيّنّا انها مساوية
لزاوية حطد والمساوية لشى واحد فهى متساوية فزاوية هحب الخارجة
مثل زاوية حطد الداخلة المتقابلتان وايضًا فقد تبيّن ان زاوية
هحب الخارجة مثل زاوية حطد الداخلة فنجعل زاوية بحط مشتركة
فمجموع زاويتى هحب بحط مثل مجموع زاويتى بحط حطد
لكن مجموع زاويتى هحب بحط مثل مجموع زاويتين قائمتين
ببرهان يج مِن ا فمجموع زاويتى بحط حطد اذن مثل مجموع
زاويتين قائمتين وهما فى جهة واحدة فقد تبيّن انه اذا أُخرج
خط مستقيم على خطين مستقيمين متوازيين فان الزاويتين
المتبادلتين متساويتان والزاويتان الداخلة والخارجة التى تُقابلها
متساويتان والزاويتان الداخلتان فى اى الجهتين كانتا فان
مجموعهما مثل مجموع زاويتين قائمتين وذلك ما ارد[نا ا]ن نبيّن ∴

الشكل الثلثون مِن المقالة الاولى

كل الخطوط المستقيمة الموازية لخط مستقيم فهى متوازية(ط)
مثاله ان خطى اب جد موازيان لخط هز فاقول ان خطى اب جد
متوازيان برهانه انا نُخرج على خطوط اب جد هز خط حط كيف
مَا خرج فقد أُخرج خط حط على خطين مستقيمين متوازيين
وهما خطا اب هز فبحسب برهان يط مِن ا تكون زاويتا اكل
كلز المتبادلتان متساويتين وايضا فانه قد أُخرج خط حط على
خطّين متوازيين وهما خطا هز جد فزاوية حلز الخارجة مثل زاوية
لمد الداخلة وذلك ايضا بحسب برهان يط مِن ا لكنّا قد بيّنّا
ان زاوية حلز مساوية لزاوية اكل والمساوية لشى واحد فهى

secant, ex I, 15 angulus $AH\Theta$ angulo EHB aequalis erit. Iam autem demonstrauimus, angulum $AH\Theta$ angulo $H\Theta D$ aequalem esse; et quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt; itaque duo anguli oppositi inter se aequales sunt, angulus EHB exterior angulo $H\Theta D$ interiori. Et iam demonstratum est, angulum EHB exteriorem angulo $H\Theta D$ interiori aequalem esse. Iam angulum $BH\Theta$ communem adiicimus. Itaque summa duorum angulorum EHB, $BH\Theta$ summae duorum angulorum $BH\Theta$, $H\Theta D$ aequalis est. Uerum summa duorum angulorum EHB, $BH\Theta$ ex I, 13 summae duorum rectorum aequalis est. Itaque summa duorum angulorum $BH\Theta$, $H\Theta D$ summae duorum rectorum aequalis est; et ad eandem partem positi sunt. Ergo demonstratum est, si recta in duas rectas inter se parallelas ducatur, angulos alternos inter se aequales esse, et angulos oppositos interiorem et exteriorem inter se aequales esse, et summam angulorum interiorum ad alterutram partem positorum summae duorum rectorum aequalem esse. Q. n. e. d.

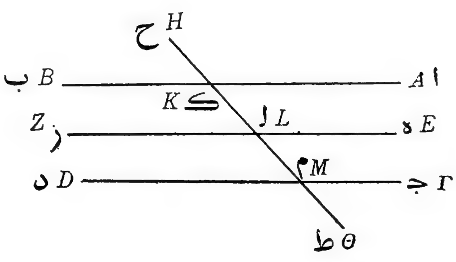


Propositio XXX libri primi.

Omnes lineae rectae lineae rectae parallelae inter se parallelae sunt.

Exemplificatio.

Duae lineae AB, GD lineae EZ parallelae sunt. Dico, duas lineas AB, GD inter se parallelas esse.



Demonstratio.

Ad lineas AB, GD, EZ quolibet modo lineam $H\Theta$ ducimus. Linea $H\Theta$ igitur ad duas lineas rectas inter se parallelas AB, EZ ducta est; itaque ex I, 19 duo anguli alterni AKL, KLZ

متساوية اكل اذن مساوية لزاوية لمد فقد أُخرج على خطى اب
جد خط حط فصيّر الزاويتين المتبادلتين متساويتين فبحسب
برهان كز مِن ا يكون خط اب موازيًا لخط جد فقد نبيّن ان
الخطوط المستقيمة الموازية لخط مستقيم فهى متوازية ايضا وذلك
ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الحادى والثلثون مِن المقالة الاولى

نُريد ان نبيّن كيف نُجيز على نقطة مفروضة خطًا موازيًا
لخط مستقيم مفروض فنجعل النقطة المفروضة نقطة ا والخط
المفروض خط بج ونريد (ونُريد) ان نُبيّن كيف نجيز على نقطة ا
خطا مستقيمًا موازيًا لخط بج فنُخرج على نقطة ا وعلى خط بج
خطًا كيف ما خرجَ وليكن خط اد ونعمل على خط اد وعلى
نقطة ا زاوية مساوية لزاوية ادج كما عُمِل ببرهان كج مِن ا
وليكن زاوية داه ونخرج خط اه على استقامةٍ الى ز فلان خط اد
قد أُخرج على خطى بجهز فصيّر الزاويتين المتبادلتين متساويتين
فبحسب برهان كز مِن ا يكون خط بج موازيًا لخط هز فقد
اجزنا على نقطة ا خطًا موازيًا لخط بج وهو خط هز وذلك ما
اردنا ان نبيّن ∴

شكل مضافٌ الى هذا الشكل

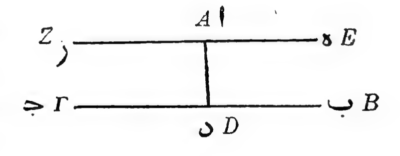
18 u. وكان موضعُه تالى الشكل العاشر ولكن لما كان

inter se aequales erunt. Rursus linea $H\Theta$ ad duas lineas inter se parallelas EZ, GD ducta est; quare angulus HLZ exterior ex eadem I, 19 angulo LMD interiori aequalis erit. Iam autem demonstrauimus, angulum HLZ angulo AKL aequalem esse; et quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt; ergo angulus AKL angulo LMD aequalis est. Ad duas igitur lineas AB, GD linea $H\Theta$ ita ducta est, ut duos angulos alternos inter se aequales efficiat. Itaque ex I, 27 linea AB lineae GD parallela est. Ergo iam demonstrauimus, lineas rectas lineae rectae parallelas inter se quoque parallelas esse. Q. n. e. d.

Propositio XXXI libri primi.

Demonstrare uolumus, quo modo per punctum datum lineam datae rectae parallelam ducamus.

Punctum datum ponimus punctum A et datam lineam lineam BG. Demonstrare uolumus, quo modo per punctum A lineae BG parallelam lineam rectam ducamus. Per punctum A et per lineam BG quolibet modo lineam ducimus, quae sit linea AD. Et ad lineam AD et punctum A angulum angulo ADG aequalem construimus, ita ut in I, 23 construximus, qui sit angulus DAE; et lineam EA in directum ad Z producimus. Iam quoniam linea AD ad duas lineas BG, EZ ita ducta est, ut angulos alternos inter se aequales efficiat, ex I, 27 linea BG lineae EZ parallela erit. Itaque per punctum A lineam EZ lineae BG parallelam duximus. Q. n. e. d.



Propositio ad hanc propositionem addenda.

Locus eius erat post prop. X, quia in I, 12 opus erat linea in tres partes aequales diuisa;*) sed quoniam demonstratio per

*) Hoc in I, 12 non usurpatur.

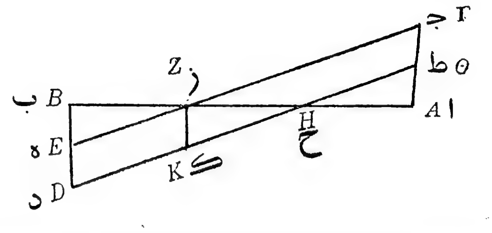
برهانه يتمّ بعد هذا الشكل كان الوجهُ فيه ان يتلوَه لان قسمة خط بثلثة اقسام متساوية يُحتاجُ اليها فى يب مِن ا فليكن الخط اب ونُقيم على نقطتى اب عمودى اج بد باىّ مقدار شينا وليكونا متساويين ونقسم كل واحد منهما بنصفين على نقطتى ەط ونُخرج خطى جزه طحد ونُخرج مِن نقطة ز خطا يُوازى عمودى اج بد وليكن خط زك فلان اج يُوازى بد اعنى جط يُوازى ەد ويُساويه والخطوط التى تصل بين اطراف الخطوطِ المتوازية متوازية ايضا ومتساوية فخطا جه طد متساويان ومتوازيان وخط زك قد أُخرج موازيًا لخط جط وخط جز يُوازى خط طك فخط زك اذن يُساوى خط جط لان السطوح المتوازية الاضلاع فان كُلّ ضلعين منها يتقابلان متساويان فخط زك اذًا يساوى طا ويُوازيه وقد وقع عليهما از فزاويتا جاز حز[ك] المتبادلتان متساويتان وزاوية جاز قائمة فزاوية حزك قائمة وزاوية حكز مثل زاوية اطح لانهما المتبادلتان فمثلثا اطح زحك تساوى زاويتان مِن احدهما زاويتين مِن الاخر كل زاويةٍ ونظيرتها وقاعدة طا مساوية لقاعدة كز فمثلث اطح مثل مثلث حكز وسائر الاضلاع مثل سائر الاضلاع فخط اح مثل خط زح وبمثل هذا البرهان يتبيّن ان مثلث زكح مثل مثلث بەز لان قاعدة كز مثل قاعدة بە وزاويتا حزك زبە قائمتان وزاوية حكز مثل زاوية كدە اعنى مثل زاوية زەب[1] فسائر الاضلاع مثل سائر الاضلاع اعنى حز مثل

---

[1]) In margine: ببرهان ٣٩

hanc propositionem*) perficitur, methodice post hanc erat collocanda.

Sit linea AB. A duobus punctis A, B duas perpendiculares cuiusuis magnitudinis erigimus, quae inter se aequales sint. Utramque ad puncta E, Θ in binas partes aequales diuidimus, et duas lineas GZE, ΘHD ducimus. Et a puncto Z lineam ducimus, quae duabus perpendicularibus AG, BD parallela est, quae sit linea ZK. Iam quoniam AG rectae BD parallela est, hoc est $G\Theta$ rectae ED parallela, et eadem ei aequalis, et lineae, quae terminos linearum inter se parallelarum [et aequalium] coniungunt, inter se quoque parallelae et aequales sunt, duae lineae GE, ΘD inter se aequales et parallelae sunt. Linea ZK autem lineae $G\Theta$ parallela ducta est, et linea GZ lineae ΘK parallela est. Ergo ZK lineae $G\Theta$ aequalis est, quoniam spatiorum, quorum latera inter se parallela sunt, bina latera opposita inter se aequalia sunt. Ergo linea ZK lineae ΘA aequalis est. Sed eadem ei parallela est, et AZ in eas incidit. Quare duo anguli alterni GAZ, $HZ[K]$ inter se aequales sunt. Angulus autem GAZ rectus est; itaque etiam HZK rectus. Et angulus HKZ angulo $A\Theta H$ aequalis est, quia alterni anguli sunt. Itaque in duobus triangulis $A\Theta H$, ZHK duo anguli alterius duobus angulis alterius alter alteri aequales sunt; et basis ΘA basi KZ aequalis est; itaque triangulus $A\Theta H$ triangulo HKZ aequalis est, et reliqua latera reliquis lateribus aequalia sunt. Itaque linea AH lineae ZH aequalis est. Eodem modo, quo in hac demonstratione, demonstrari potest, triangulum ZKH triangulo BEZ aequalem esse, quia basis KZ basi BE aequalis est, et duo anguli HZK, ZBE recti sunt, et angulus HKZ angulo KDE aequalis



*) H. e. prop. 31; sed in demonstratione etiam prop. 33 usurpatur.

زب فاقسام اح حز زب متساوية وذلك ما اردنا ان نبيّن وعلى هذا السبيل يقسم باى اقسام شينا الى غير نهاية ∴

الشكل الثاني والثلثون مِن المقالة الاولى

كل مثلث يخرج (ع) ضِلع مِن اضلاعِهِ على استقامَةٍ فان الزاوية التى تحدث خارج المثلث مثل (ط) مجموع زاويتيه الداخلتين اللتين تقابلانها وزوايا المثلث الثلث اذا جُمِعَت مثل مجموع زاويتين قائمتين مثاله ان مثلث ابج قد أُخرج ضِلعٌ مِن اضلاعِهِ وهو ضلع بج على استقامَةٍ الى نقطة د فاقول ان زاوية اجد مثل مجموع زاويتى ابج باج وان زوايا ابج بجا جاب الثلث اذا جُمِعَت مساوية لمجموع زاويتين قائمتين برهانه انا نُخرج مِن نقطة ج خط جه موازيا لضلع با كما بُيّن اخراجُه ببرهان لا مِن ا فخط اج مُخرج على خطى اب جه المتوازيين فببرهان كط مِن ا زاويتا باج اجه المتبادلتان متساويتان وايضا فانّه قد أُخرج خط بجد على خطى اب جه المتوازيين فزاويتا ابد هجد المتقابلتان متساويتان وذلك ببرهان كط مِن ا وقد بيّنّا ان زاوية اجه مساوية لزاوية باج فنجعلُ زاوية اجب مشتركة فمجموع زاويتى اجد اجب مساوية لمجموع زوايا اجب ابج باج الثلثة لكن مجموع زاويتى اجب اجد مثل زاويتين قائمتين بحسب برهان يج مِن ا 19 r. فزوايا المثلث الثلث اعنى اجب ابج باج اذا جُمعت مثل مجموع زاويتين قائمتين وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

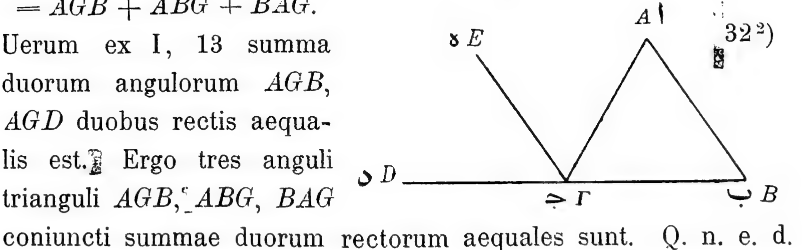
est, h. e. angulo ZEB.[1]) Quare reliqua latera reliquis lateribus aequalia sunt, uelut $HZ = ZB$, et partes, quae sunt AH, HZ. ZB inter se aequales sunt. Q. n. e. d. Et eo modo linea in quotlibet partes in infinitum diuidi potest.

Propositio XXXII libri primi.

Si in quouis triangulo latus quoduis eius in directum producitur, angulus extra triangulum positus summae duorum angulorum eius interiorum et illi oppositorum aequalis erit, et tres anguli trianguli coniuncti summae duorum rectorum aequales erunt.

Exemplificatio. Latus quoduis BG trianguli ABG in directum ad punctum D producatur. Dico, angulum AGD summae duorum angulorum ABG, BAG aequalem esse, et tres angulos ABG, BGA, GAB coniunctos summae duorum rectorum aequales esse.

Demonstratio. A puncto G lineam GE lateri BA parallelam ducimus, ita ut in I, 31 demonstratum est. Linea AG igitur in duas lineas parallelas AB, GE incidit. Itaque ex I, 29 duo anguli BAG, AGE alterni inter se aequales sunt. Rursus linea BGD in duas lineas inter se parallelas AB, GE ducta est; quare ex I, 29 duo anguli ABD, EGD oppositi inter se aequales sunt. Iam autem demonstrauimus, angulum AGE angulo BAG aequalem esse.*) Itaque communi addito angulo AGB erit $AGD + AGB = AGB + ABG + BAG$.



Uerum ex I, 13 summa duorum angulorum AGB, AGD duobus rectis aequalis est. Ergo tres anguli trianguli AGB, ABG, BAG coniuncti summae duorum rectorum aequales sunt. Q. n. e. d.

---

[1]) In margine: in dem. XXIX.

*) Deest: quare $\angle AGD = BAG + ABG$.

[2]) Hinc scriba figuras numeris notare incipit.

الشكل الثالث والثلثون مِن المقالة الاولى

الخطوط (ع) المستقيمة التى تصِلُ ما بين اطراف الخطوط المتوازية المتساوية (الاقدار)[1] فى كلتى الجهتين هى ايضا متوازية (ط) متساوية (الاقدار)[1] ∴ مثالُهُ ان خطى اب جد متوازيان متساويان وقد وُصِل مَا بين اطرافهما بخطى اج بد فاقول ان خطى اج بد متوازيان متساويان برهانه انا نُخرج خط اد فخط اد قد أُخرجَ على خطى اب جد المتوازيين فببرهان كط مِن ا تكون زاويتا باد ادج المتبادلتان متساويتين وخط اب فُرِض مساويا لخط جد وناخذ خط اد مشتركًا فضِلعَا با اد مِن مثلث باد مساويان لضِلعَى جد دا مِن مثلث ادج وزاويه باد مساوية لزاوية ادج فببرهان د مِن ا يكون ضلع بد الباقى مِن مثلث ابد مثل ضلع اج الباقى مِن مثلث ادج وسائر الزوايا مثلُ سائر الزوايا كل زاوية مثل نظيرتها فزاوية ادب مساوية لزاوية جاد فقد أُخرج على خطى اج بد خط اد فصيّر زاويتى جاب ادب المتبادلتين متساويتين فببرهان كز مِن ا يكون خط اج موازيًا لخط بد وقد بيّنّا انه مساوٍ له فخطا اج بد متساويان ومتوازيان وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الرابع والثلثون مِن المقالة الاولى

كُلُ السطوح (ع) المتوازية الاضلاع فانّ كل ضلعين منها يتقابلان او زاويتين تتقابلان فهما متساويان (ط) والقطرُ يقطع (ط)

---

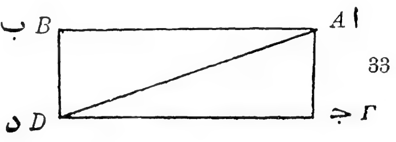
[1]) Haec uerba atramento rubro inserta.

Propositio XXXIII libri primi.

Rectae, quae terminos linearum inter se parallelarum et aequalium ad alterutram partem coniungunt, et ipsae inter se parallelae et aequales sunt.

Exemplificatio. Duae lineae *AB*, *GD* inter se parallelae et aequales sint, et termini earum duabus lineis *AG*, *BD* coniuncti sint. Dico, duas lineas *AG*, *BD* inter se parallelas et aequales esse.

Demonstratio. Lineam *AD* ducimus. Linea *AD* igitur in duas lineas inter se parallelas *AB*, *GD* incidit. Itaque ex I, 29 duo anguli alterni *BAD*, *ADG* inter se aequales sunt. Et linea *AB* lineae *GD* data est aequalis. Linea igitur *AD* communi sumpta duo latera *BA*, *AD* trianguli *BAD* duobus lateribus *GD*, *DA* trianguli *ADG* aequalia sunt; et angulus *BAD* angulo *ADG* aequalis. Itaque ex I, 4 *BD* reliquum latus trianguli *ABD* aequale est reliquo lateri *AG* trianguli *ADG*, et reliqui anguli reliquis angulis aequales alter alteri; quare $\angle ADB = \angle GAD$. Itaque in duas lineas *AG*, *BD* linea *AD* ita incidit, ut duos angulos alternos *GAB* (scr. *GAD*), *ADB* inter se aequales efficiat. Quare ex I, 27 linea *AG* lineae *BD* parallela est. Et iam demonstrauimus, eam ei aequalem esse. Ergo duae lineae *AG*, *BD* inter se aequales et parallelae sunt. Q. n. e. d.



Propositio XXXIV libri primi.

In spatiis parallelogrammis duo quaelibet latera opposita et anguli oppositi inter se aequalia sunt, et diametrus spatium in duas partes aequales diuidit.

Exemplificatio. In spatio parallelogrammo *ABGD**) la-

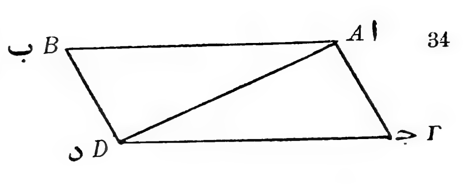
*) Ita etiam cod. P apud Eucl. I p. 82, 3.

السطح بنصفين مثاله ان سطح اب جد متوازى الاضلاع ضلع
اب موازٍ لضلع جد وضلع اج موازٍ لضلع بد وقد أُخرج قُطر اد
فاقول ان ضلع اب مثل ضلع جد وضلع اج مثل ضلع بد وزاوية
ا مثل زاوية د وزاوية ب مثل زاوية ج وقُطر اد يقسم سطح اب جد
بنصفين فيصير مثلث ابد مثل مثلث اجد برهانه انه قد أُخرج
على خطى اب جد المتوازيين خط اد فببرهان كط مِن ا تصير
زاويتا باد ادج المتبادلتان متساويتين وايضا فقد أُخرج على
خطى اج بد المتوازيين خط اد فببرهان كط مِن ا فان زاويتى
جاد ادب المتبادلتين متساويتان فزاوية باد مِن مثلث ابد مثل
زاوية ادج مِن مثلث اجد وناخذ ضلع اد مشتركًا فببرهان كو
مِن ا فان الضلعين الباقيين مِن مثلث ابد مساويان للضلعين
الباقيين مِن مثلث اجد كل ضلع مثل نظيره اب مثل جد واج
مثل بد والزاويتان الباقيتان متساويتان ابد مثل اجد والمثلث
مثل المثلث وقد بيّنّا ان زاوية باد مساوية لزاوية ادج وزاوية ادب
مساوية لزاوية جاد فزاوية باج باسرها مساوية لزاوية بدج باسرها
وقد بيّنّا ان خط اج مثل خط بد فقد تبيّن ان كل سطح
متوازى الاضلاع فان كُلّ ضلعين منه يتقابلان او زاويتين
تتقابلان فهما متساويان والقطر يقسم السطح بنصفين وذلك
ما اردنا ان نبيّن ∴

19 u. الشكل الخامس والثلثون مِن المقالة الاولى

السطوح المتوازية الاضلاع اذا كانت على قاعدة واحدة وبين (ع)
خطين متوازيين فهى [ط] متساوية مثاله ان سطحى اب جد هز جد

tus AB lateri GD parallelum sit, et latus AG lateri BD, et ducta sit diametrus AD. Dico, esse $AB = GD$, $AG = BD$ et $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle G$, et



diametrum AD spatium $ABGD$*) in duas partes aequales diuidere, ita ut triangulus ABD triangulo AGD aequalis fiat.

Demonstratio. Ad duas igitur lineas AB, GD inter se parallelas linea AD ducitur; itaque ex I, 29 duo anguli alterni BAD, ADG inter se aequales sunt. Rursus ad duas lineas AG, BD inter se parallelas linea AD ducitur; itaque ex I, 29 duo anguli alterni GAD, ADB inter se aequales sunt. Et angulus BAD trianguli ABD angulo ADG trianguli AGD aequalis est, et latus AD commune. Quare ex I, 26 reliqua duo latera trianguli ABD reliquis duobus lateribus trianguli AGD aequalia sunt alterum alteri, $AB = GD$, $AG = BD$, et reliqui duo anguli inter se aequales sunt, $ABD = AGD$, et triangulus triangulo aequalis. Et quoniam demonstrauimus, esse $\angle BAD = ADG$, et $\angle ADB = GAD$, erit totus angulus BAG toti angulo BDG aequalis. Et demonstrauimus, esse $AG = BD$**). Ergo demonstratum est, in quouis spatio parallelogrammo quaelibet duo latera opposita et angulos oppositos inter se aequalia esse, et diametrum spatium in duas partes aequales diuidere. Q. n. e. d.

Propositio XXXV libri primi.

Spatia parallelogramma in eadem basi et inter duas lineas inter se parallelas posita inter se aequalia sunt.

Exemplificatio. Spatia $ABGD$, $EZGD$ parallelogramma

*) Cfr. codd. PV apud Eucl. I p. 82, 4.

**) Aut hoc omittendum erat, aut addendum etiam, esse $AB = GD$, ut supra demonstratum est.

متوازيا الاضلاع وهما جميعًا على قاعدة جد وبين خطين متوازيين
وهما از جد فاقول ان سطحى اب جد هز جد متساويان برهانه انه
قد أُخرِجَ على خطى اج بد المتوازيين خط ابز فببرهان كط
مِن ا تكون زاوية باج الداخلة مثل زاوية زبد الخارجة وايضا
فان سطحى اب جد هز جد فُرضا متوازيى الاضلاع فببرهان لد مِن
ا فان كل ضلعين يتقابلان متساوَيان وضلع اج مساوٍ لضلع
بد وضلع اب مساوٍ لضلع جد وضلع هز ايضًا مساوٍ لضلع جد
والمساوية لشى واحد فهى متساوية فخط اب مثل خط هز وناخذ
خط به مشتركًا فخط اه باسرِهِ مساوٍ لخط زب باسرِهِ وكنّا بيّنّا
ان خط اج مثل خط بد فضلعا زب بد مِن مثلث بدز مثل
ضلعى ها اج مِن مثلث اجه كل ضلعٍ كما بيّنّا مساوٍ لنظيره
وزاوية دبز مساوية لزاوية جاه فببرهان د مِن ا تكون قاعدة
جه مثل [قاعدة دز ومثلث بدز مثل مثلث اجه فنلقى مثلث
بهح المشترك فيبقى مُنحرف ابحج مثل منحرف هزدح وناخذ
مثلث جدح مشتركًا [فسطح[1] ابجد باسره مثل سطح هزجد
باسره وهما السطحان اللذان على قاعدةٍ واحدةٍ وبين خطّين
متوازيين وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ زيادة قال ايرن وقوع هذا
الشكل على ثلثة وجه احدها ما بيّنه اوقليدس وهو اصعبها
والثانى - - - - - - والثالث[2]

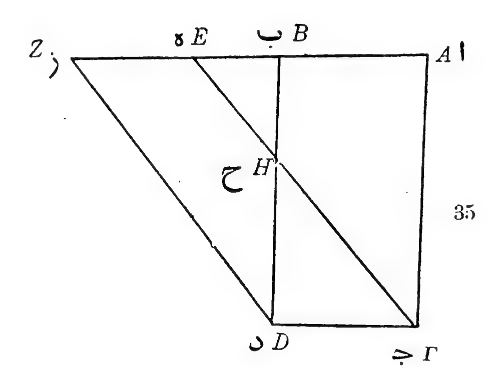
---

[1]) Hoc uocabulum in cod. omissum.

[2]) Uerba ab زيادة usque ad والثالث in una linea pressius scripta, sed eadem manu, lacuna post والثانى relicta, aperte postea inculcata sunt, et scriptori spatium scholii Heronis perficiendi defuit.

sint in eadem basi *GD* et inter duas lineas inter se parallelas *AZ*, *GD* posita. Dico, duo spatia *ABGD*, *EZGD* inter se aequalia esse.

D e m o n s t r a t i o. Ad duas lineas *AG*, *BD* inter se parallelas ducta est linea *ABZ*. Itaque ex I, 29 angulus *BAG* interior angulo *ZBD* exteriori aequalis est. Rursus datum est, duo spatia *ABGD*, *EZGD* parallelogramma esse; itaque ex I, 34 quaelibet duo latera opposita inter se aequalia sunt, $AG = BD$, $AB = GD$. Uerum etiam $EZ = GD$. Quae autem eidem aequalia sunt, inter se aequalia sunt; itaque $AB = EZ$. Et adiecta *BE* communi erit tota linea *AE* toti lineae *ZB* aequalis. Iam autem demonstrauimus, esse $AG = BD$. Itaque duo latera *ZB*, *BD* trianguli *BDZ* duobus lateribus *EA*, *AG* trianguli *AGE*, ut demonstrauimus, aequalia sunt alterum alteri; et angulus *DBZ* angulo *GAE* aequalis. Quare ex I, 4 basis *GE* basi *DZ* et triangulus *BDZ* triangulo *AGE* aequalis est. Triangulum *BEH*, qui communis est, subtrahimus; itaque trapezium *ABHG* trapezio *EZDH* aequale est. Et communem adiicimus triangulum *GDH*. Ergo totum spatium *ABGD* toti spatio *EZGD* aequale est, quae duo spatia in eadem basi et inter duas lineas parallelas posita sunt. Q. n. e. d.



A d d i t a m e n t u m. Hero tres huius demonstrationis casus commemorauit,*) quarum una est, quam demonstrauit Euclides, et ea quidem difficillima, secunda autem . . . et tertia . . .

*) Cfr. Proclus p. 399, 4 sq., ubi Herone non commemorato praeter casum ab Euclide demonstratum, quem χαλεπωτέραν πτῶσιν uocat, duos alios demonstrat.

الشكل السادس والثلثون من المقالة الاولى

السطوح (ع) المتوازية الاضلاع اذا كانت على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين فهى (ط) متساوية مثاله ان سطحى ابجد هزحط متوازيا الاضلاع وهما على قاعدتين متساويتين وهما بد زط وبين خطين متوازيين وهما خطا بط اح فاقول ان سطحى ابجد هزحط[1] متساويان برهانه انا نخرج خطى هب حد وكنا فرضنا قاعدة بد مثل قاعدة زط وسطح هزحط فرضناه متوازى الاضلاع فببرهان لد من ا يكون خط هح مثل خط زط والمساوية لشى واحد فهى متساوية فخط بد مساوٍ لخط هح وهو ايضا موازٍ له والخطوط التى تصل بين اطراف الخطوط المتوازية المتساوية فى كلتى الجهتين هى ايضا متوازية متساوية كما بيّنّا ببرهان لج من ا فخط هب مثل خط (خط) دح وموازٍ له فسطح هب دح متوازى الاضلاع وهو مع سطح هزحط على قاعدة واحدة هح وبين خطّى اح بط المتوازيين فببرهان له من ا فان سطح هبدح مثل سطح هزحط وايضا فان سطحى ابجد بدهح على قاعدة بد وبين خطى اح بط المتوازيين فببرهان له من ا فان سطح ابجد مساوٍ لسطح بدهح والمساوية لشى واحد فهى متساوية فسطح ابجد مساوٍ لسطح هزحط فقد تبيّن ان السطوح المتوازية الاضلاع التى هى على قواعد متساوية وبين خطين متوازيين هى متساوية وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ زيادة

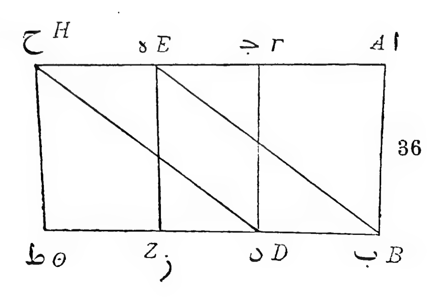
[1] In cod. ازجط

Propositio XXXVI libri primi.

Si spatia parallelogramma in basibus inter se aequalibus et inter duas lineas inter se parallelas posita sunt, inter se aequalia sunt.

Exemplificatio. Duo spatia *ABGD*, *EZHΘ*, parallelogramma sint, in duabus basibus inter se aequalibus *BD*, *ZΘ* et inter duas lineas inter se parallelas *BΘ*, *AH* posita. Dico, duo spatia *ABGD*, *EZHΘ* inter se aequalia esse.

Demonstratio. Duas lineas *EB*, *HD* ducimus. Supposuimus igitur, basim *BD* basi *ZΘ* aequalem et spatium *EZHΘ* parallelogrammum esse. Et ex I, 34 linea *EH* lineae *ZΘ* aequalis est. Quae autem eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt. Linea *BD* igitur lineae *EH* aequalis. Eadem autem ei parallela est. Et lineae, quae terminos linearum inter se parallelarum et aequalium ad alterutram partem coniungunt, etiam inter se parallelae et aequales sunt, ita ut in I, 33 demonstrauimus. Itaque linea *EB* lineae *DH* aequalis et parallela est. Quare etiam spatium *EBDH* parallelogrammum est. Et in eadem basi *EH* est, in qua etiam spatium *EZHΘ*, et inter duas lineas inter se parallelas *AH*, *BΘ* posita sunt. Itaque ex I, 35 spatium *EBDH* spatio *EZHΘ* aequale est. Rursus quoniam duo spatia *ABGD*, *BDEH* in basi *BD* et inter duas lineas inter se parallelas *AH*, *BΘ* posita sunt, ex I, 35 spatium *ABGD* spatio *BEDH* aequale est. Quae autem eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt. Ergo spatium *ABGD* spatio *EZHΘ* aequale est.



Itaque demonstratum est, spatia parallelogramma in basibus inter se aequalibus et inter duas lineas inter se parallelas posita inter se aequalia esse. Q. n. e. d.

Additamentum. Hero dixit: hic casus est unus e plu-

قال ايرن وهذا مِن اختلاف الوقوع كما كان قبله والبرهان عليهما واحد ع [1]

20 r.

الشكل السابع والثلثون مِن المقالة الاولى

اذا كانت (ع) المثلثات على قاعدة واحدة وبين (ع) خطين متوازيين فهى متساوية (ط) مثاله ان مثلثى ابج دبج على قاعدة واحدة وهى قاعدة بج وبين خطين متوازيين وهما خطا بج اد فى الجهتين [فاقول] ان مثلث ابج مثل مثلث دبج برهانه انا نُخرج خط اد فى الجهتين جميعًا ونخرج مِن نقطة ب خطًا موازيًا لخط اج يلقى الخط المخرَج على نقطة ه ونُخرج ايضًا مِن نقطة ج خطا موازيا لخط بد يلقى الخط المخرَج على نقطة ز واخراج هذين الخطّين كما بيّن ببرهان لا مِن ا فمِن البيّن ان سطح به اج متوازى الاضلاع وكذلك سطح بد جز متوازى الاضلاع وهما على قاعدةٍ واحدةٍ وبين خطّى هز بج المتوازيين فببرهان له مِن ا يكون سطح به اج مثل سطح بدزج فلان سطح بهاج متوازى الاضلاع فببرهان لد مِن ا فان القطر الذى هو خط اب يقسمهُ بنصفين فمثلث ابه مثل مثلث ابج وبمثل هذا الاستشهاد يتبيّن ان مثلث دجز مثل مثلث دجب والمتساوية فانّ انصا فها متساو[ية] فمثلث دجب اذن مساوية لمثلث ابج فقد تبيّن ان المثلثات التى هى على قاعدة واحدة وبين خطّين متوازيين فهى متساوية وذلك ما اردنا ان نبيّن

[1]) Hoc quoque scholium Heronis minoribus litteris ab eadem manu scriptum postea insertum uidetur.

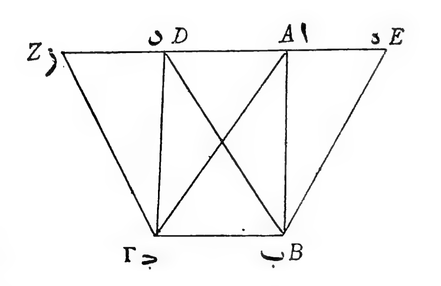
ribus, sicut in praecedenti, et demonstratio utriusque eorum eadem est.*)

Propositio XXXVII libri primi.

Trianguli in eadem basi et inter duas lineas inter se parallelas positi inter se aequales sunt.

Exemplificatio. Duo trianguli *ABG*, *DBG* in eadem basi *BG* et inter duas lineas inter se parallelas *BG*, *AD* ad alterutram partem positi sint. [Dico], triangulum *ABG* triangulo *DBG* aequalem esse.

Demonstratio. Lineam *AD* simul ad utramque partem producimus et a puncto *B* lineam lineae *AG* parallelam ducimus ita, ut lineam productam in puncto *E* secet. Rursus a puncto *G* lineam lineae *BD* parallelam ducimus ita, ut lineam productam in puncto *Z* secet. Et hae duae lineae eo modo ducuntur, quo in I, 31 demonstratum est. Manifestum igitur, spatium *BEAG* parallelogrammum esse et eodem modo spatium *BDGZ*. Et haec spatia in eadem basi et inter duas lineas inter se parallelas *EZ*, *BG* posita sunt. Itaque ex I, 35 spatium *BEAG* spatio *BDZG* aequale est. Iam quoniam spatium *BEAG* parallelogrammum est, ex I, 34 a diametro, quae est linea *AB*, in duas partes [aequales] diuiditur. Itaque triangulus *ABE* triangulo *ABG* aequalis est. Eodem modo demonstrabimus, triangulum *DGZ* triangulo *DGB* aequalem esse. Dimidiae autem partes magnitudinum inter se aequalium inter se aequales sunt; itaque triangulus *DGB* triangulo *ABG* aequalis est. Ergo demonstratum est, triangulos in eadem basi et inter duas lineas inter se parallelas positos inter se aequales esse. Q. n. e. d.



*) Cfr. Proclus p. 401, 4 sq., ubi Heronis mentio non fit.

الشكل الثامن والثلثون من المقالة الاولى

كل المثلثات (ع) التى على قواعد متساوية وبين (فى)[1] خطين متوازيين فهى متساوية (ط) مثاله ان مثلثى ابج دجه على قاعدتين متساويتين وهما بج جه وبين خطين متوازيين وهما به اد فاقول ان المثلثين متساويان برهانه انا نخرج خط اد فى كلتى الجهتين ونخرج من نقطة ب خطا موازيًا لخط اج يلتقى الخط المخرج على نقطة ز ونخرج ايضا من نقطة ه خطا موازيًا لخط جد يلقى الخط المخرج على نقطة ح كما بيّن اخراج ذلك ببرهان لا من ا فمن البيّن ان سطحى اجبذ دجهح متوازيا الاضلاع فببرهان لد من ا مع برهان لو من ا فان سطحى اجبز دجهح متوازيا الاضلاع وعلى قاعدتين متساويتين وبين خطين متوازيين فمتوازى اجبز مساوٍ لمتوازى دجهح والقطر يقسم كل واحد منهما بنصفين اعنى اب ده وانصاف المتساوية متساوية فمثلث ابج مثل مثلث دجه فقد تبيّن ان المثلثات التى على قواعِدَ متساوية وبين خطين متوازيين فهى متساوية وذلك ما اردنا ان نبيّن زيادة فى هذا الشكل لايرن يتبيّن بعد بيان هذا المعنى ان كل مثلثين يساوى ضلعان من احدهما ضلعين من الاخر كل ضلعٍ لنظيره وتكون زاوية احدهما اعظم من زاوية الاخر اعنى اللتين يحيط بهما الاضلاع المتساوية (فان هاتين الزاويتين اللتين يحيط بهما الاضلاع المتساوية) فان هاتين الزاويتين اللتين يحيط بهما الاضلاع المتساوية مجموعتين ان كانتا معادلتين لقائمتين فان

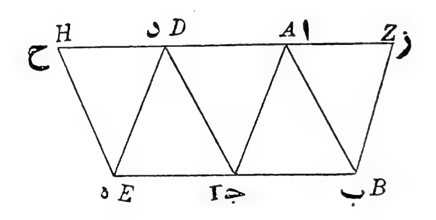
[1]) Sic atramento rubro supra scriptum.

Propositio XXXVIII libri primi.

Omnes trianguli, qui in basibus inter se aequalibus et inter duas lineas inter se parallelas positi sunt, inter se aequales sunt.

Exemplificatio. Duo trianguli *ABG*, *DGE* in duabus basibus *BG*, *GE* inter se aequalibus et inter duas lineas inter se parallelas *BE*, *AD* positi sint. Dico, duos illos triangulos inter se aequales esse.

Demonstratio. Lineam *AD* ad utramque partem producimus et a puncto *B* lineam lineae *AG* parallelam ducimus, quae lineam productam in puncto *Z* secet. Rursus a puncto *E* lineam lineae *GD* parallelam ducimus, quae lineam productam in puncto *H* secat, ita ut in I, 31 demonstratum est. Manifestum igitur, duo spatia *AGBZ*, *DGEH* parallelogramma esse. Itaque ex I, 34 et I, 36, quoniam duo spatia *AGBZ*, *DGEH* parallelogramma sunt et in duabus basibus inter se aequalibus et inter duas lineas parallelas posita, parallelogrammum *AGBZ* parallelogrammo *DGEH* aequale est, et diametri *AB*, *DE* utramque in binas partes [aequales] diuidunt. Dimidia autem magnitudinum inter se aequalium inter se aequalia sunt; itaque triangulus *ABG* triangulo *DGE* aequalis. Ergo demonstratum est, triangulos in basibus inter se aequalibus et inter duas lineas inter se parallelas positos inter se aequales esse. Q. n. e. d.

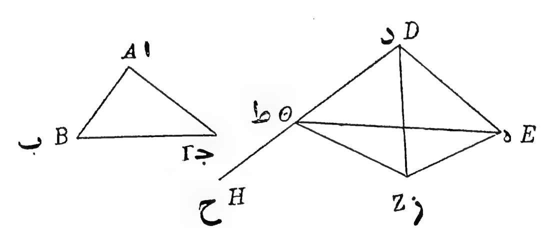


Additamentum Heronis ad hanc propositionem. Hac propositione demonstrata hoc demonstrandum: Si in duobus triangulis duo latera alterius duobus lateribus alterius aequalia sunt alterum alteri, et angulus alterius angulo alterius maior est, eorum scilicet, quos latera inter se aequalia comprehendunt, tum, si summa duorum angulorum, quos latera inter se aequalia comprehendunt, duobus rectis aequalis est, duo trian-

المثلثين متساويان وان كانتا اقل مِن قائمتين فالمثلث الذى زاويته اعظمُ اعظمُ مِن للمثلث الاخر وان كانتا اعظم مِن قائمتين فالمثلثُ الذى زاويتُه اصغرُ اعظمُ مِن المثلث الاخر فلتكن زاويتا باج هدز مِن مثلثى اجب دهز وهما على الصّفةِ التى ذكرناها 20 u.
معادلتين لقائمتين اولاً على انّ زاوية باج اعظمُ ونعمل على نقطة د مِن خط ده زاوية هدح مساويةً لزاوية باج كما بيّن ببرهان كج مِن ا ونجيزُ على نقطة ز خط زط يُوازى خط ده كما بيّن ببرهان لا مِن ا ونُخرج خط طه فزاويتا باج هدط متساويتان وكنّا فرضنا مجموعَ زاويتى باج هدز مساويًا لمجموع زاويتين قائمتين فمجموعُ زاويتى هدز هدط مساوٍ لمجموع زاويتين قائمتين لان خط زط اُخرج موازيًا لخط ده فببرهان كط مِن ا يكون مجموع الزاويتين الداخلتين اللتين فى جهة واحدة مساويتين لمجموع زاويتين قائمتين فنُسقط زاوية هدط المشتركة فتبقى زاوية هدز مساويةً لزاوية دطز فلان خط زط موازٍ لخط ده تكون [زاوية] دزط مساوية لزاوية هدز والمساوية لشى واحد تكون متساويةً فزاوية دزط مساوية لزاوية دطز فساق دز مساوٍ لساق دط وخط دز مثل خط اج فخط دط اِذن مثل اج وخط ده مثل خط اب وزاوية باج مثل زاوية هدط فقاعدة بج مساوية لقاعدة هط ومثلث ابج مساوٍ لمثلث دهط فلانّ مثلثى دهط دهز على قاعدة واحدة وهى قاعدة ده وبين خطّين متوازيين وهما ده طز فببرهان لز مِن ا يكون مثلث دهط مثل مثلث دهز وقد بيّنّا ان مثلث دهط مثل مثلث ابج فمثلث ابج مثل مثلث دهز لان المساوية

guli inter se aequales sunt, sin duobus rectis minor, triangulus, cuius angulus maior est, et ipse altero maior, sin duobus rectis maior, triangulus, cuius angulus minor est, altero triangulo maior est.

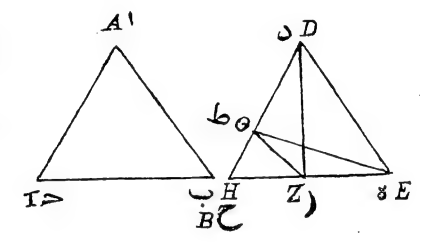
Sint duo anguli BAG, EDZ in duobus triangulis AGB, DEZ, et primum, sicut indicauimus, duobus rectis aequales sint, et angulus BAG maior. Iam ad punctum D lineae DE angulum EDH construimus angulo BAG aequalem, ita ut in I, 23 demonstratum est. Per punctum Z lineam $Z\Theta$ ducimus lineae DE parallelam, ita ut in [I] 31 demonstratum est, et lineam ΘE ducimus. Iam anguli BAG, $ED\Theta$ inter se aequales sunt, et summam duorum angulorum BAG, EDZ duobus rectis aequalem supposuimus; itaque summa duorum angulorum EDZ, $ED\Theta$ duobus rectis aequalis erit. Et quoniam linea $Z\Theta$ lineae DE parallela ducta est, ex I, 29 summa duorum angulorum in eadem parte intra positorum duobus rectis aequalis est. Itaque subtracto, qui communis est, $\angle ED\Theta$ relinquitur $\angle EDZ = D\Theta Z$. Et quoniam linea $Z\Theta$ lineae DE parallela est, angulus $DZ\Theta$ angulo EDZ aequalis erit. Quae autem eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt; itaque $\angle\ Z\Theta = \angle D\Theta Z$; quare latus DZ lateri $D\Theta$ aequale est. Uerum linea DZ lineae AG aequalis est; quare linea $D\Theta = AG$. Et $DE = AB$, $\angle BAG = \angle ED\Theta$; itaque basis BG basi $E\Theta$ aequalis est et $\triangle\ ABG = \triangle\ DE\Theta$. Et quoniam duo trianguli $DE\Theta$, DEZ in eadem basi DE et inter duas lineas inter se parallelas DE, ΘZ positi sunt, ex I, 37 erit $\triangle\ DE\Theta = \triangle\ DEZ$. Sed iam demonstrauimus, triangulum $DE\Theta$ triangulo ABG aequalem esse. Ergo $\triangle\ ABG = \triangle\ DEZ$, quia, quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt. Q. n. e. d.



لشى واحد متساوية وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ وايضًا فى الصورة الثانية فانا نُنزِل انّ زاويتى باج هدز اصغرُ مِن زاويتين قائمتين وزاوية باج اعظم مِن زاوية هدز وضلع اب مثل ضلع ده وضلع اج مثل ضلع دز ونبيّن كما بيّنّا قبل ان المثلث ابجُ اعظم مِن مثلث دهز فنعمل زاوية هدح مثل زاوية باج ونُخرج زط يُوازى هد فلان مجموع زاويتى باج هدز اصغرُ مِن مجموع زاويتين قائمتين فمجموع زاويتى هدط هدز اصغر مِن مجموع زاويتين قائمتين لكن مجموع زاويتى هدط دطز مثل زاويتين قائمتين فاذا اسقطنا زاوية هدط المشتركة بقيت زاوية هدز اصغر مِن زاوية دطز لكن زاوية هدز مساوية لزاوية دطز المتبادلتان فزاوية دزط اصغرُ مِن زاوية دطز فببرهان يط مِن ا يكون ضلع دز اعظم مِن ضلع دط ونُنزل ان دح مثل دز ونصِل حه فخط دح مثل خط اج وخط ده مثل خط اب وزاوية باج مثل زاوية هدح فببرهان د مِن ا يكون مثلث ابج مثل مثلث دهح لكن مثلث دهح اعظم مِن مثلث دهز فمثلث ابج اعظم مِن مثلث دهز وذلك ما اردنا ان نبيّن وايضًا فى الصورة الثالثة فانا نُنزل ان مجموع زاويتى باج دهز اعظم مِن مجموع قائمتين فاقول ان مثلث ابج اصغرُ مِن مثلث دهز وذلك لانه تبقى زاوية هدز اعظم مِن زاوية دطز وزاوية هدز مساوية لزاوية دزط فزاوية 21 r. دزط اذن اعظم مِن زاوية دطز فببرهان [يط] مِن [ا] يكون ضلع دط اعظم مِن ضلع دز ونفصل دح مثل دز فبحسب البرهان المتقدم وبذلك الاستشهاد يتبيّن ان مثلث دهح مثل مثلث ابج لكن مثلث دهط اعظم مِن مثلث ابج ومثلث دهط مثل مثلث دهز

Rursus in figura secunda supponimus, duos angulos BAG, EDZ duobus rectis minores esse et $\angle BAG > EDZ$ et latus AB lateri DE, latus AG lateri DZ aequale. Eodem modo, quo antea, demonstrabimus, triangulum ABG triangulo DEZ maiorem esse.

Angulum EDH angulo BAG aequalem construimus, et $Z\Theta$ lineae ED parallelam ducimus. Quoniam igitur summa duorum angulorum BAG, EDZ duobus rectis minor est, etiam summa duorum angulorum $ED\Theta$, EDZ duobus rectis minor erit. Summa autem duorum angulorum $ED\Theta$, $D\Theta Z$ duobus rectis aequalis est; itaque subtracto, qui communis est, angulo $ED\Theta$ relinquitur $\angle EDZ < D\Theta Z$. Est autem $\angle EDZ = \angle D\Theta Z$ (scr. $DZ\Theta$); nam duo anguli alterni sunt. Quare etiam $\angle DZ\Theta < D\Theta Z$. Itaque ex I, 19 latus DZ latere $D\Theta$ maius est. Ponimus $DH = DZ$*) et HE ducimus. Itaque linea DH lineae AG aequalis est; et $DE = AB$, $\angle BAG = \angle EDH$; quare ex I, 4 $\triangle ABG = \triangle DEH$. Sed $\triangle DEH > \triangle DEZ$. Ergo $\triangle ABG > \triangle DEZ$. Q. n. e. d.



Rursus in figura tertia supponimus, summam duorum angulorum BAG, DEZ duobus rectis maiorem esse. Dico, triangulum ABG triangulo DEZ minorem esse. Quoniam enim relinquitur angulus EDZ maior angulo $D\Theta Z$,**) et $\angle EDZ = \angle DZ\Theta$, angulus $DZ\Theta$ angulo $D\Theta Z$ maior erit, et ex [I, 19] latus $D\Theta$ latere DZ maius.

Abscindimus DH lineae DZ aequalem. Et eodem modo iisdemque rationibus, quibus antea, demonstramus, triangulum

*) Non recte Z in HE positum.

**) Intellegitur igitur, positum esse ut supra $\angle ED\Theta = BAG$ et $Z\Theta$ rectae DE parallelam ductam esse.

فمثلث دهز اعظم مِن مثلث ابج فمثلث ابج اصغر مِن مثلث
دهز وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل التاسع والثلثون مِن المقالة الاولى

كل (ع) المثلثات المتساويات اذا كانت على قاعدةٍ واحدةٍ
في جهة واحدة فانها بين خطين (ط) متوازيين ∴ مثاله ان مثلثي
ابج دبج متساويان وهما على قاعدة واحدة وهي بج وبين
خطي بج اد فاقول ان اد موازٍ لخط بج برهانه انه ان امكنَ ان
نخرج مِن نقطة ا خطًا اخر موازيًا لخط بج غير خط اد فليُخرج
فنُنزِل انه خط اه ونخرج خط جه فلان مثلثي ابج بجه على
قاعدة واحدة وبين خطّين متوازيين وهما خطا بج اه فببرهان
لز مِن ا فان مثلث ابج مساوٍ لمثلث بجه لكن مثلث ابج مثل
مثلث بجد والمساوية لشي واحد فهي متساوية فمثلث بجه مثل
مثلث بجد الاصغر مثل الاعظم هذا خلف غير ممكن فليس
يُمكن ان يُخرج مِن نقطة ا خط موازٍ لخط بج غير خط اد
وكذلك لا يمكن ان يُخرج مِن نُقطة ا خط يُوازي بج فوق خط
اد وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الاربعون مِن المقالة الاولى

كل المثلثات المتساويات اذا كانت على قواعِدَ متساوية
مِن خطٍّ واحدٍ مستقيمٍ وبين خطين فان الخطين متوازيان مثاله
ان مثلثي ابج دجه متساويان وعلى قاعدتين متساويتين وهما
بج جه مِن خطٍ واحدٍ وهو به وبين خطي اد به فاقول ان خط

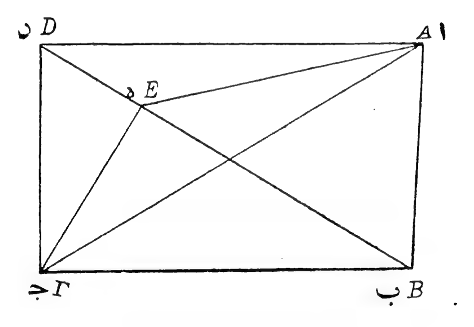
DEH triangulo ABG aequalem esse. Uerum $\triangle\ DE\Theta > ABG$. Et $\triangle\ DE\Theta = DEZ$. Ergo $\triangle\ DEZ > ABG$, et $\triangle\ ABG < DEZ$. Q. n. e. d.

Propositio XXXIX libri primi.

Omnes trianguli inter se aequales in eadem basi ad eandem partem positi inter lineas inter se parallelas positi sunt.

Exemplificatio. Duo trianguli ABG, DBG inter se aequales in eadem basi BG et inter duas lineas BG, AD positi sint. Dico, AD lineae BG parallelam esse.

Demonstratio. Si fieri potest, ut a puncto A aliam lineam ac lineam AD lineae BG parallelam ducamus, ducatur. Supponamus, eam esse lineam AE. Lineam GE ducimus. Quoniam duo trianguli ABG, BGE in eadem basi et inter duas lineas inter se parallelas lineas BG, AE positi sunt, ex I, 37 erit $\triangle\ ABG = BGE$. Sed $\triangle\ ABG = BGD$; et quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt; itaque $\triangle\ BGE = BGD$, minor maiori aequalis; quod absurdum est neque fieri potets. Ergo fieri non potest, ut a puncto A linea lineae BG parallela ducatur alia ac AD. Et eodem modo fieri non potest, ut a puncto A linea lineae BG parallela supra lineam AD ducatur. Q. n. e. d.



Propositio XL libri primi.

Si trianguli inter se aequales in aequalibus basibus in eadem linea recta positis et inter duas lineas positi sunt, hae duae lineae inter se parallelae sunt.

اد موازٍ لخط به برهانه انه ان امكن ان نُخرج مِن نقطة ا خطًا موازيًا لخط به غير خط اد فليخرج ونُنزِل انه خط از فخط از موازٍ لخط به فمثلثا ابج جزه على قاعدتى بج جه المتساويتين وبين خطى از به المتوازيين فببرهان لح مِن ا يكون مثلث ابج مساويًا لمثلث جزه لكنا فرضنا مثلث ابج مساويًا لمثلث جده والمساوية لشى واحد فهى متساوية فمثلث جده مثل مثلث جزه الاعظم مثل الاصغر هذا خلف غير ممكن فقد تبيّن انه ليس يمكن ان يُخرج مِن نقطة ا خط موازٍ لخط به غير خط اد وليس يُمكن ان يُخرج ايضًا فوق خط اد خط يوازى خط به وذلك ما اردنا ان نُبيّن ∴

الشكل الحادى والاربعون مِن المقالة الاولى

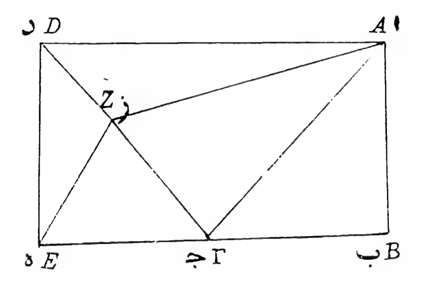
كل سطح متوازى الاضلاع قاعدتهُ قاعدةُ مثلثٍ وهما بين خطين متوازيين فانّ السطح المتوازى الاضلاع ضعفُ المثلث مثالهُ ان سطح ابجد متوازى الاضلاع وقاعدته جد وهى ايضا قاعدةُ مثلث جده وهما بين خطى جد اه المتوازيين فاقول ان سطح ابجد ضعف مثلث جده برهانه انّا نُخرج قُطر اد فمن البيّن بحسب برهان لد ان القطر (يقطع) يقسم[*] سطح ابجد بنصفين فسطح ابجد ضِعفُ مثلث اجد لكن مثلثى اجد جده على قاعدة واحدة وهى قاعدةُ جد وبين خطين متوازيين وهما خطا جد اه

21 u.

*) Supra scriptum.

Exemplificatio. Duo trianguli ABG, DGE inter se aequales sint et in duabus basibus inter se aequalibus BG, GE in eadem linea BE positis et inter duas lineas AD, BE positi sint. Dico, lineam AD lineae BE parallelam esse.

Demonstratio. Si fieri potest, ut a puncto A aliam lineam ac lineam AD lineae BE parallelam ducamus, ducatur. Supponimus, eam esse lineam AZ, ita ut linea AZ lineae BE parallela sit. Itaque duo trianguli ABG, GZE in duabus basibus inter se aequalibus BG, GE et inter duas lineas AZ, BE inter se parallelas positi sunt. Triangulus ABG igitur ex I, 38 triangulo GZE aequalis erit. Supposuimus autem, triangulum ABG triangulo GDE aequalem esse; et quae eidem aequalia sunt, etiam inter se aequalia sunt: itaque triangulus GDE triangulo GZE aequalis erit. maior minori; quod absurdum est neque fieri potest. Ergo demonstratum est, fieri non posse, ut a puncto A linea lineae BE parallela ducatur alia ac linea AD. Neque fieri potest, ut supra lineam AD lineam lineae BE parallelam ducamus. Q. n. e. d.



Propositio XLI libri primi.

Si basis parallelogrammi basis est trianguli, et ambo inter duas lineas inter se parallelas posita sunt, parallelogrammum duplo maius erit triangulo.

Exemplificatio. Sit parallelogrammum $ABGD$ et basis eius GD, quae eadem sit basis trianguli GDE, et ambo inter duas lineas GD, AE inter se parallelas posita sint. Dico, spatium $ABGD$ triangulo GDE duplo maius esse.

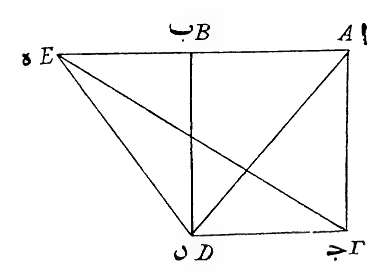
Demonstratio. Diametrum AD ducimus. Ex [I] 34 igitur manifestum est, diametrum spatium $ABGD$ in duas partes [aequales] diuidere; quare spatium $ABGD$ triangulo AGD duplo maius

فببرهان لز يكون مثلث جده مثل مثلث اجد وقد تبيّن ان سطح ابجد ضِعف مثلث اجد فسطح ابجد ضِعف سطح جده فقد تبيّن ان كل سطح متوازى الاضلاع قاعدتُه قاعدةُ مثلث وهما بين خطين متوازيين فان المتوازى ضعفُ المثلث وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الثانى والاربعون مِن المقالة الاولى

نُريد ان نبيّن كيف نعمل سطحًا متوازى الاضلاع مساوية زاويته(ع) لزاويةٍ معلومةٍ ومساويًا لمثلثٍ معلوم فلتكن الزاوية المعلومة زاوية د والمثلث المعلوم مثلث ابج ونُريد ان نعمل سطحًا متوازى الاضلاع مساويةً زاويته لزاوية د ومساويًا لمثلث ابج فنقصِد الى احد اضلاع المثلث فنقسمه بنصفين بحسب برهان ي مِن ا فنُنزل ان الضلع الذى نقسمه بنصفين ضلع بج على نقطة ه ونخرج خط اه ونعمل على نقطة ه مِن خط جه زاوية مساويةً لزاوية د بحسب برهان كج مِن ا ولتكن زاوية جهز ونُخرج مِن نقطة ج خطًا موازيًا لخط هز ومِن نقطة ا خطاً موازيًا لخط بج بحسب برهان لا مِن ا وليكن خط ازح فلانّ مثلثى ابه اهج على قاعدتين متساويتين وهما قاعدتا به هج وارتفاعُهما واحدٌ وبين خطين متوازيين وهما بج اح فان بحسب برهان لح مِن ا يكون مثلث ابه مثل مثلث اهج فمثلث ابج ضِعف مثلث اهج لكن سطح جهزح متوازى الاضلاع وقاعدتُه اعنى هج قاعدةُ مثلث اهج وهما بين خطين متوازيين بج اح فبحسب برهان ما يكون سطح جهزح ضِعف

est. Sed duo trianguli *AGD*, *GDE* in eadem basi *GD* et inter duas lineas inter se parallelas *GD*, *AE* positi sunt. Itaque ex (I) 37 $\triangle\ GDE = \triangle\ AGD$. Uerum etiam demonstratum est, spatium *ABGD* duplo maius esse triangulo *AGD*; quare spatium *ABGD* duplo maius est spatio *GDE*. Ergo iam demonstratum est, si basis parallelogrammi eadem basis trianguli sit, et ambo inter duas lineas parallelas posita sint, parallelogrammum duplo maius esse triangulo. Q. n. e. d.



Propositio XLII libri primi.

Demonstrare uolumus, quo modo parallelogrammum, cuius angulus angulo dato aequalis sit, triangulo dato aequale construamus.

Sit angulus datus angulus *D* et triangulus datus triangulus *ABG*. Parallelogrammum igitur, cuius angulus angulo *D* aequalis sit, triangulo *ABG* aequale construere uolumus. Unum ex lateribus trianguli sumimus idque ex I, 10 in duas partes [aequales] diuidimus. Supponimus, nos latus *BG* in puncto *E* in duas partes [aequales] diuisisse. Ducta linea *AE* ad punctum *E* in linea *GE* positum ex I, 23 angulum angulo *D* aequalem construimus, qui sit angulus *GEZ*, et a puncto *G* lineam lineae *EZ* parallelam, a puncto *A* autem lineam lineae *BG* parallelam ex I, 31 ducimus, quae sit linea *AZH*. Quoniam duo trianguli *ABE*, *AEG* in basibus inter se aequalibus *BE*, *EG* sunt, et altitudo eorum eadem est, et inter duas lineas inter se parallelas, quae sunt *BG*, *AH*, positi sunt, ex I, 38 triangulus *ABE* triangulo *AEG* aequalis erit, et triangulus *ABG* duplo maior erit triangulo *AEG*. Sed spatium *GEZH* parallelogrammum est, et basis eius *EG* basis trianguli *AEG* est, et ambo inter duas lineas inter se parallelas *BG*, *AH* posita sunt. Ex [I] 41 igitur spa-

مثلث اجه وقد كُنّا بيّنا ان مثلث ابج ضِعف اجه والتى هى اضعاف لشى واحد فهى متساوية فمتوازى جهزح مساوٍ لمثلث ابج فقد عملنا سطح جهزح متوازى الاضلاع مساويًا لمثلث ابج المعلوم ومساوية زاويته اعنى جهز لزاوية د المعلومة وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

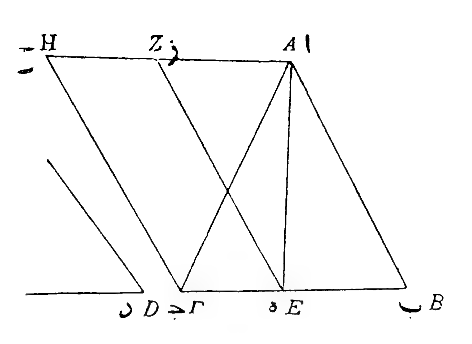
الشكل الثالث والاربعون مِن المقالة الاولى

كل سطح (ع) متوازى الاضلاع على جنبتى[1] قُطره سطحان متوازيا الاضلاع (يتممان السطح[1]) فانّ السطحين المتمّمين الذين عن جنبتى القُطر (ط) متساويان مثاله ان سطح ابجد متوازى الاضلاع وقُطره بج وعن جنبتى قطرِه سطحا از زد يتمّمان السطح فاقول انهما متساويان برهانهُ ان سطح ابجد متوازى الاضلاع وقطره بج فببرهان لد فان كل واحد مِن قُطرى جز زب يقسمان السطحين بنصفين فمثلث هزج مساوٍ لمثلث جزح ومثلث طبز مساوٍ لمثلث بكز فمجموع مثلثى هزج طبز مثل مجموع مثلثى زحج بكز فاذا اسقطنا مجموعَ مثلثى هزج طبز مِن مثلث ابج ومجموع مثلثى جحز بكز مِن مثلث بدج بقى سطح از مثل سطح زد المتممان وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ 22 r.

---

[1]) Atr. rubro additum.

tium $GEZH$ duplo maius est triangulo AGE. Iam autem demonstrauimus, triangulum ABG duplo maiorem esse [triangulo] AGE. Et quae eodem duplo maiora sunt, inter se aequalia sunt: itaque parallelogrammum $GEZH$ triangulo ABG aequale est. Ergo parallelogrammum $GEZH$ triangulo dato ABG aequale construximus, et angulum eius GEZ angulo dato D aequalem fecimus. Q. n. e. d.

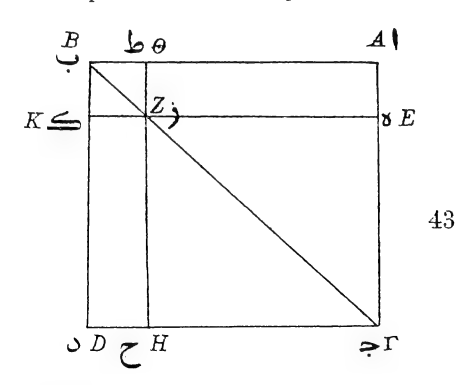


Propositio XLIII libri primi.

In quouis parallelogrammo, circum cuius diametrum posita sunt duo parallelogramma, spatia, quae complementa sunt spatiorum circum diametrum positorum, inter se aequalia sunt.

Exemplificatio. Sit parallelogrammum $ABGD$ diametrusque eius BG, et ab utraque parte diametri eius duo spatia sint AZ, ZD, quae complementa sint spatiorum. Dico, ea inter se aequalia esse.

Demonstratio. Quoniam spatium $ABGD$ parallelogrammum est, et BG eius diametrus, ex [I,] 34 utraque diametrus GZ, ZB duo spatia in binas partes [aequales] diuidit, et $\triangle\ EZG = GZH$, $\triangle\ \Theta BZ = BKZ$. Summa igitur duorum triangulorum EZG, ΘBZ summae triangulorum ZHG, BKZ aequalis est. Quare summa duorum triangulorum EZG, ΘBZ a triangulo ABG subtracta et summa duorum triangulorum GHZ, BKZ a triangulo



43

الشكل الرابع والاربعون مِن المقالة الاولى

نُريد ان نبيّن كيف نعمل على خط مستقيمٍ معلومٍ سطحًا متوازى الاضلاع مساويًا لمثلثٍ معلومٍ ومساوية زاويته لزاوية معلومة فنجعل الخط المعلوم خط اب والمثلث المعلوم مثلث جده والزاوية المعلومة زاوية ز ونُريد ان نبيّن كيف نعمل على خط اب سطحًا متوازى الاضلاع مساويًا لمثلث جده ومساوية زاويته لزاوية ز فنخرج خط اب على استقامةٍ فننزل انّا قد اخرجناهُ الى نقطة ح ونجعل بح مثل نصف ده الذى هو قاعدةُ مثلث جده ونعمل عليه سطحًا متوازى الاضلاع مساويًا لمثلث جده وهو سطح بطكح ومساوية زاوية حبط منه لزاوية ز وذلك بحسب برهان مب ونُخرج خط طك على استقامة الى نقطة ل ونُخرج مِن نقطة ا خطًا موازيًا لخط بط ببرهان لا ونُنزل انه قد التقى مع خط كطل على نقطة ل ونصِل بين نقطتى ل ب ونُخرج خطى لب كح على استقامةٍ فهما يلتقيان لان خطى كح ال متوازيان وقد وقع عليهما خط لك فبحسب برهان كط فانّ مجموع الزاويتين الداخلتين اللتين فى جهة واحدة مثل مجموع زاويتين قائمتين فمجموع زاويتى لكم كلم اصغر مِن مجموع زاويتين قائمتين فبحسب ما بيّن اغانيس ببرهان الاشكال المقدّمة لشكل كط وبحسب ما قدّم اوقليدس فى المصادرة فان خطى كح لب اذا اخرجَا التقيا فلنُنزل انهما قد التقيا على نُقطة م ونُخرج مِن نُقطة م خطًا مُوازيًا لخط كل ببُرهان لا وليكن خط من ونُخرج لا على استقامَة ونُنزل انه قد التقى مع خط من على نقطة ن ونُخرج ايضًا خط طب على

BDG subtracta relinquitur spatium *AZ* spatio *ZD* aequale, quae duo complementa sunt. Q. n. e. d.

Propositio XLIV libri primi.

Demonstrare uolumus, quo modo in recta linea data parallelogrammum construamus triangulo dato aequale, et cuius angulus angulo dato aequalis sit.

Lineam datam ponimus lineam *AB*, triangulum datum triangulum *GDE*, angulum datum angulum *Z*. Demonstrare uolumus, quo modo in linea *AB* parallelogrammum construamus triangulo *GDE* aequale, et cuius angulus sit angulus *Z*.

Lineam *AB* in directum producimus et supponimus, nos eam ad punctum *H* produxisse. [Rectam] *BH* dimidiam ponimus [rectae] *DE*, quae basis est trianguli *GDE*, et in ea parallelogrammum *BΘKH* ex [I] 42 ita construimus, ut triangulo *GDE* aequale sit, et angulus eius *HBΘ* angulo *Z* aequalis sit. Lineam *ΘK* in directum ad punctum *L* producimus, et a puncto *A* ex [I] 31 lineam lineae *BΘ* parallelam ducimus eamque supponimus cum linea *KΘL* in puncto *L* concurrere. Duo puncta *L*, *B* coniungimus et duas lineas *LB*, *KH* in directum producimus, donec concurrant. Quoniam enim duae lineae *KH*, *AL* inter se parallelae sunt, et linea *LK* in eas incidit, ex [I] 29 summa duorum angulorum interiorum ad eandem partem positorum summae duorum rectorum aequalis erit; quare summa duorum angulorum *LKM*, *KLM* summa duorum rectorum minor est. Itaque ex eo, quod Geminus in demonstratione propositionum propositioni XXIX praemissarum[1]) demonstrauit, et ex eo, quod Euclides in postulato [5] praemisit, duae lineae *KH*, *LB* productae concurrunt. Supponamus, eas in puncto *M* concurrere, et a puncto *M* ex [I] 31 lineam lineae *KL* parallelam ducimus, quae sit linea *MN*. Et *LA* in directum productam cum linea *MN* in puncto *N* concurrere supponimus. Praeterea

---

[1]) U. supra p. 127 sqq.

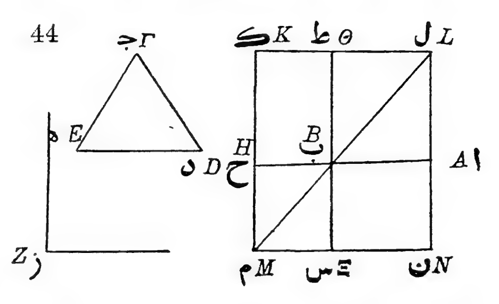
الاستقامة ولينته الى خط من على نقطة س فسطح لم متوازى الاضلاع وقطره لم وعلى قطره سطحا اط سح متوازيا الاضلاع يقطعهما القطر وعن جنبتى القطر سطحان متوازيان يتمّمان السطح وهما سطحا نب بك فبحسب برهان مج فان المتمّمين متساويان اعنى ان سطح نب مثل سطح بك وسطح بك عملناه مثل مثلث جده فسطح نب مساوٍ لمثلث جده وكنّا عملنا زاوية حبط مثل زاوية ز لكن زاوية حبط مساوية لزاوية ابس بحسب برهان يه فزاوية ابس مثل زاوية ز فقد عملنا على خط اب المستقيم سطح اس المتوازى الاضلاع مساويًا لمثلث جده المفروض ومساوية زاويته لزاوية ز وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل الخامس والاربعون من المقالة الاولى

نريد ان نبيّن كيف نعمل على خط مستقيم معلوم سطحًا مربّعًا قائم الزوايا فليكن الخط المفروض اب فنخرج من نقطة ا خطًا على زاوية قائمة مساويًا لخط اب كما بيّن ببرهان الشكل المضاف الى يا وليكن خط اج ونخرج من نقطة ج خطًا [موازيا لخط اب ببرهان لا وبهذا العمل نخرج خط بد موازيًا][1] لخط اج يلقى خط جد على نقطة د فسطح ابجد متوازى الاضلاع وببرهان لد فان السطوح المتوازية الاضلاع كل ضلعين منها يتقابلان او زاويتين تتقابلان فهما متساويان فضلع بد مثل ضلع اج وكنّا اخرجنا ضلع اج مثل ضلع اب فضلع بد مثل ضلع اب وضلع 22 u.

[1]) Uerba uncis inclusa in margine addita.

lineam ΘB in directum producimus, donec cum linea MN in puncto Ξ concurrat. Itaque spatium LM parallelogrammum est et diametrus eius LM. Et ad diametrum eius duo parallelogramma sunt $A\Theta$, ΞH, quae diametrus secat, et circum diametrum duo parallelogramma, quae spatii complementa sunt, NB, BK; itaque ex [I] 43 complementa inter se aequalia sunt, hoc est $NB = BK$. Uerum spatium BK triangulo GDE aequale construximus; quare spatium NB triangulo GDE aequale est. Et angulum $HB\Theta$ angulo Z aequalem construximus; angulus autem $HB\Theta$ ex [I] 15 angulo $AB\Xi$ aequalis est; itaque $\angle AB\Xi = \angle Z$.

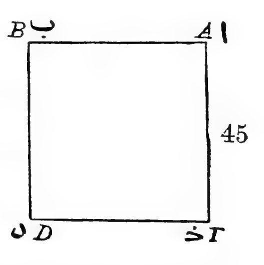


Ergo in recta linea AB parallelogrammum $A\Xi$ construximus dato triangulo GDE aequale, et cuius angulus angulo Z aequalis sit. Q. n. e. d.

Propositio XLV*) libri primi.

Demonstrare uolumus, quo modo in recta linea data quadratum construamus.

Sit linea data AB. A puncto A ad rectos angulos lineam ducimus lineae AB aequalem ita, ut in demonstratione propositionis propositioni XI additae**) demonstratum est, quae sit linea AG. A puncto G ex [I] 31 lineam [GD] lineae AB parallelam ducimus et per eandem constructionem lineam BD lineae AG parallelam ducimus, quae cum linea GD in puncto D concurrat. Itaque spatium $ABGD$ parallelogrammum est. Sed ex [I] 34 in parallelogrammis duo



*) H. e. Euclidis prop. 46; prop. 45 deest.
**) U. supra p. 73 sqq.

جد مثل ضلع اب فالاضلاع الاربعة متساوية وزاوية د مثل زاوية ا وزاوية ا عملناها قائمة فزاوية د قائمة وزاوية ب مثل زاوية ج وعملنا زاوية ج قائمة فزاوية باد قائمة فالزوايا الاربع كل واحدة منها قائمة فسطح ابجد متساوى الاضلاع قائم الزوايا فقد عملنا على خط اب سطحًا مربّعا قائم الزوايا وذلك ما اردنا ان نبيّن

الشكل السادس والاربعون مِن المقالة الاولى

كل مثلث قائم الزاوية فان(*¹⁻ المربع الكائن مِن الضلع الذى يُوتّر الزاوية القائمة مساو لمجموع المربعين الكائنين مِن الضلعين الباقيين مثاله ان زاوية باج مِن مثلث ابج قائمة فاقول ان المربع الكائن مِن ضلع بج المُوتّر لزاوية باج القائمة مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين مِن ضلعى اب اج و[هم]ا الضِلعَان المحيطان بالزاوية القائمة برهانه انّا نعمل على خط بج سطحًا مُربعًا قائم الزوايا كما بيّنّا عمله ببرهان مه وليكن مربع بجده ونعمل ايضًا على خطى اب اج مربعى ابزح اطكج قائمى الزوايا ونُخرج مِن نقطة ا خط ال موازيًا لخطى بد جه كما بيّن ببرهان

1-*) In margine est: فان تلبين وتر الزاوية القائمة فى نفسه مثل تلبين الضلعين الباقيين كل واحد منهما فى نفسه ∴.
Laterculus lateris recto angulo oppositi in se multiplicati aequalis est laterculis utriusque reliquorum laterum in se multiplicati. — De usu uocabuli تلبين cfr. Hyginus de cond. agr. p. 122, 17: sunt plinthides id est laterculi quadrati, et Archimedis epigramma II p. 452, 36. Haec significatio uocabuli تلبين in notis marginalibus libri secundi Al-Narizii frequentissime adhibetur.

latera opposita et duo anguli oppositi inter se aequalia sunt, h. e. $BD = AG$. Uerum latus AG lateri AB aequale duximus; itaque latus BD lateri AB aequale est. Et $GD = AB$. Quattuor igitur latera inter se aequalia sunt. Et $\angle D = \angle A$. Angulum A autem rectum construximus; quare etiam $\angle D$ rectus est. Et $\angle B = \angle G$. Angulum G autem rectum construximus. Quare $\angle BAD$ (scr. ABD) rectus est, et quattuor anguli singuli recti sunt. Spatium $ABGD$ igitur aequilaterum et rectangulum est. Ergo in linea AB quadratum construximus. Q. n. e. d.

Propositio XLVI libri primi.

In triangulo, cuius angulus rectus est, quadratum lateris angulo recto oppositi summae duorum quadratorum reliquorum duorum laterum aequale est.

Exemplificatio. In triangulo ABG angulus BAG rectus sit. Dico, quadratum lateris BG angulo recto BAG oppositi summae duorum quadratorum duorum laterum AB, AG, quae angulum rectum comprehendunt, aequale esse.

Demonstratio. In linea BG quadratum construimus, ita ut in [I] 45 demonstrauimus, quod sit quadratum $BGDE$. Rursus in duobus lateribus AB, AG duobus quadratis $ABZH$, $A\Theta KG$ constructis a puncto A lineam AL duobus lineis BD, GE parallelam ducimus, ita ut in [I] 31 demonstratum est.

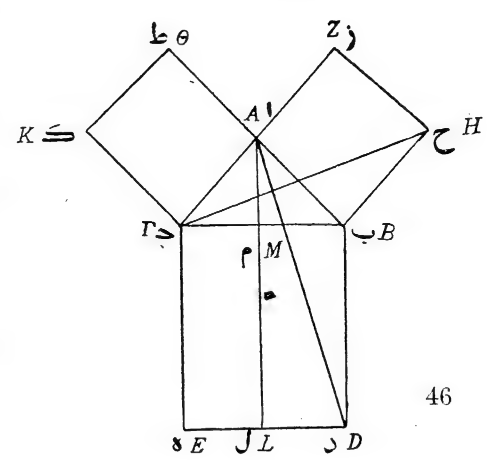
Duas lineas AD, GH ducimus. Iam quoniam a puncto A in linea BA duae lineae AG, AZ in partes diuersas ductae sunt, et utrimque effectus est angulus rectus: BAG, BAZ, ex I, 14 manifestum est, duas lineas AG, AZ in directum coniunctas esse, ita ut unam rectam efficiant.

Eadem demonstratione et eadem ratione demonstramus, duas lineas BA, $A\Theta$ in directum coniunctas esse, ita ut unam rectam efficiant. Quoniam angulus ABH rectus angulo GBD recto aequalis est, angulo ABG communi sumpto totus angulus GBH toti angulo ABD aequalis est. Uerum $BH = AB$, et $BD = BG$; itaque [rectae] HB, BG rectis AB, BD aequales sunt. Et

لا ونُخرج خطى اد جح فلانّه قد أُخرجَ مِن نقطة ا مِن خط با خطا اج از فى جهتين مختلفتين فحدث عن جنبتيهِ زاويتا باج باز وكلّ واحدة منهما قائمة فمِن البيّن بحسب برهان يد ان خطى اج از قد اتّصلا على استقامةٍ فصارا خطًّا واحدًا وبمثل هذا البرهان والاستشهاد يتبيّن ان خطى با اط قد اتّصلا على استقامةٍ فصارا خطًّا واحدًا فلان زاوية ابح القائمة مساوية لزاوية جبد القائمة وناخذ زاوية ابج مشتركة فزاوية جبح باسرها مساوية لزاوية ابد باسرها وضلع بح مساوٍ لضلع اب وضلع بد مساوٍ لضلع بج فضلعا حب بج مساويان لضلعى اب بد وزاوية ابد مساوية لزاوية جبح فبحسب برهان د يكون مثلث جبح مساويًا لمثلث ابد ولان سطح ابزح متوازى الاضلاع وقاعدته قاعدة مثلث جبح وهى خط حب وهما بين خطى زج حب المتوازيين فبحسب برهان ما يكون سطح ابزح ضعف مثلث جبح وايضا فان سطح بدمل متوازى الاضلاع وقاعدته قاعدة مثلث ابد وهى خط بد وهما بين خطى ال بد المتوازيين فببرهان ما يكون سطح بدمل ضعف مثلث ابد وقد كُنّا بيّنّا ان مثلث ابد مساوٍ لمثلث جبح وان سطح ابزح ضعفه والتى هى اضعاف لشى واحد فهى متساوية فمُربع ابزح مساو لسطح بدمل وبمثل هذا البرهان والاستشهاد يتبيّن ان سطح جهمل مساوٍ لمربع اجطك فسطح بجده باسره مساوٍ لمجموع مُربّعى ابزح اجطك فقد تبيّن انّ المربع الكائن مِن ضلع بج الموتر لزاوية باج القائمة مساوٍ لمجموع المربعين الكائنين مِن

$\angle\, ABD = \angle\, GBH$; itaque ex [I] 4 $\triangle\, GBH = ABD$. Quoniam spatium *ABZH* parallelogrammum est, basisque eius eadem basis trianguli *GBH*, scilicet linea *HB*, et ambo inter lineas inter se parallelas *ZG*, *HB* posita sunt, spatium *ABZH* ex I, 41 triangulo *GBH* duplo maius erit.

Rursus quoniam spatium *BDML* parallelogrammum est, basisque eius basis trianguli *ABD*, scilicet linea *BD*, et ambo inter lineas inter se parallelas *AL*, *BD* posita sunt, spatium *BDML* ex I, 41 triangulo *ABD* duplo maius erit. Sed iam demonstrauimus, triangulum *ABD* triangulo *GBH* aequalem esse. Et spatium *ABZH* eo duplo maius est; quae autem eodem duplo maiora sunt, inter se aequalia sunt; itaque quadratum *ABZH* spatio *BDML* aequale est.



Eadem demonstratione et eadem ratione demonstramus, spatium *GEML* quadrato *AGΘK* aequale esse. Ergo totum spatium *BGDE* summae duorum quadratorum *ABZH*, *AGΘK* aequale est. Iam igitur demonstratum est, quadratum lateris *BG* angulo *BAG* recto oppositi summae duorum quadratorum laterum *AB*, *AG* aequale esse. Q. n. e. d.

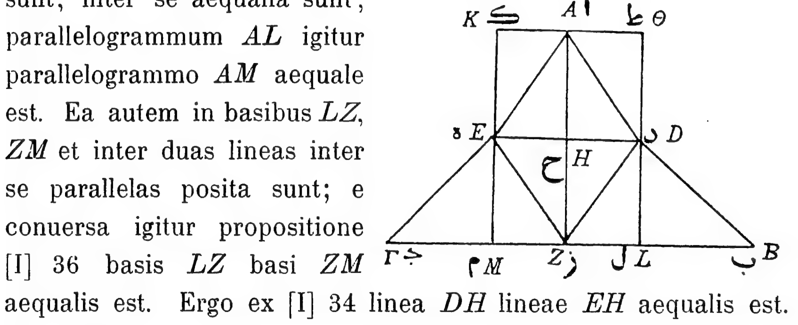
Additamentum Heronis ad hanc propositionem. Demonstrare uolumus, tres lineas, duas scilicet, quae a duobus angulis duorum quadratorum ad duos angulos trianguli rectanguli ducantur, et lineam, quae ab angulo eius recto duobus lateribus quadrati parallela ducatur, in eodem puncto inter se secare. Quod quo facilius demonstretur, tres notiones praemittimus.

Prima: In triangulo *ABG* linea *DE* basi *BG* parallela ducta et per lineam *AHZ* in duas partes aequales diuisa linea

ضلعى اب اج وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ زيادة فى هذا الشكل
لايرُن نريد ان نبيّن ان الخطوط الثلثة اعنى اللذين يخرجان مِن
زاويتى المربعين الى زاويتى المثلث القائم الزاوية والذى يخرج 23 r.
مِن زاويته القائمة موازيًا لضلعى المربع تتقاطع على نقطة واحدة
فنوطّى لذلك ثلثة معان الاول منها انه اذا اخرج فى مثلث ابج
خط ده موازيًا لقاعدة بج وقُسِمَ بج بنصفين بخط احز فان خط
دح ايضا يكون مثل خط حه فلنُخرج على نقطة ا خط طك
موازيًا لخط بج كما بُيّن ببرهان لا وكذلك نُجيز على نقطتى ده
خطى كهم طدل يُوازيان خط احز ونصلُ دز وهز فمثلثا ابز ازج
متساويان لانهما على قاعدتين متساويتين وارتفاعهما على نقطة
واحدة وهى نقطة ا وذلك بحسب برهان لح وايْضا فبحسب هذا
البرهان فلان مثلثى بدز زهج على قاعدتى بز زج المتساويتين
وبين خطى بج ده المتوازيين فان مثلث بدز مساوٍ لمثلث زهج
فاذا اسقطناهما مِن مثلثى ابز ازج المتساويين بقى مثلث ادز
مثل مثلث اهز ولان قاعدة كل واحد مِن هذين المثلثين
المتساويين خط از وخط از قاعدة لسطحى ال ام المتوازيين فان
كل واحد مِن سطحى ال ام المتوازيين مثلا مثلّثه ببرهان ما
والاشيا التى هى مثلان لشى واحد فهى متساوية فمتوازى ال مثل
متوازى ام وهما على قاعدتى لز زم وبين خطين متوازيين فبحسب
عكس برهان لو فان قاعدة لز مثل قاعدة زم وبحسب برهان لد
يكون خط دح مثل خط هح وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ والمعنى
الثانى انه اذا أُجيز فيما بين خطى اب جد وهما متوازيان ثلثة

DH lineae HE aequalis erit. Per punctum A lineam ΘK lineae BG parallelam ducimus, ita ut in [I] 31 demonstratum est. Eodem modo per puncta D, E duas lineas KEM, ΘDL lineae AHZ parallelas ducimus ducimusque DZ, EZ. Itaque duo trianguli ABZ, AZG inter se aequales sunt, quia in duabus basibus inter se aequalibus positi sunt, et altitudines eorum in eodem puncto sunt,*) scilicet in puncto A; quod ex [I] 38 sequitur.

Rursus ex eadem propositione, quoniam duo trianguli BDZ, ZEG in basibus BZ, ZG inter se aequalibus et inter duas lineas BG, DE inter se parallelas positi sunt, erit $\triangle\ BDZ = ZEG$. Quibus a triangulis ABZ, AZG inter se aequalibus subtractis relinquitur $\triangle\ ADZ = AEZ$. Iam quoniam basis utriusque horum triangulorum inter se aequalium linea AZ est, et linea AZ eadem basis est duorum parallelogrammorum AL, AM, utrumque parallelogrammum AL, AM ex [I] 41 triangulo suo aequale (scr. duplo maius) erit. Et quae eodem aequalia (scr. duplo maiora) sunt, inter se aequalia sunt; parallelogrammum AL igitur parallelogrammo AM aequale est. Ea autem in basibus LZ, ZM et inter duas lineas inter se parallelas posita sunt; e conuersa igitur propositione [I] 36 basis LZ basi ZM aequalis est. Ergo ex [I] 34 linea DH lineae EH aequalis est. Q. n. e. d.



Notio secunda. Si per spatium[1]) inter duas lineas AB, GD inter se parallelas positum tres lineae ducuntur in eodem puncto inter se secantes, uelut BG, AD, EZ, quae in puncto H inter se ita secent, ut linea GZ lineae ZD aequalis sit, erit $AE = EB$.

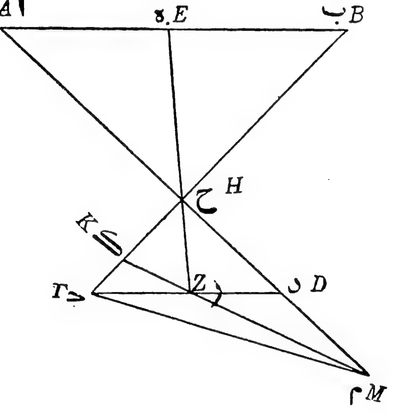
*) H. e. inter easdem parallelas.
[1]) Proprie: Id, quod est.

خطوط تتقاطع على نقطة واحدة كخطوط بج اد هز تتقاطع على
نقطة ح فيصيّر خط جز مساويًا لخط زد فان خط اه يكون مثل
خط هب فلنُوطّى لذلك انه متى كان خط اح اعظم مِن خط حد
فان خط بح يكون اعظم مِن خط حج وان كان مساويًا له
كان مساويًا لَهُ وان كان اصغر مِنهُ كان اصغر مِنهُ فلنُنزِل ان
اح اعظم مِن حد فاقول ان بح اعظم مِن حج فان لم يكن اعظم
مِنهُ فانه مثله او اصغر مِنهُ فلنُنزِل انه مثله ونخرج حد الى م حتى
يكون حم مثل اح فضلعا اح حب مثل ضِلعَى مح حج وزاوية
احب مساوية لزاوية جحم وذلك ببرهان يه واما بحسب برهان د
فان قاعدة جم مثل قاعدة اب وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا فزاوية
حجم مساوية لزاوية ابح فببرهان كز فان خط اب مواز لخط جم
فيكون بحسب ل خط جم موازيًا لخط جد وهما يتقاطعان هذا
خلف فليس بح مساويًا لخط حج فلننزل انه اصغر منه ونفصِل
حك مساويًا لخط بح ونصل كم فيتبيّن بمثل ذلك ان كم موازٍ
لخط با وذلك خلف اذ كان خط با موازيًا لخط دج فليس اذن
بح باصغر مِن حج فهو اذن اعظم منه وكذلك يتبيّن انه متى
كان اح مثل حد كان بح مثل حج ومتى كان اصغر منه
كان اصغر منه فاذا قد وُطِّىَ ذلك فلنُبيّن الآن انّ جز متى كان
مثل زد فانّ اه يكون مثل هب فلنُنزِل اح اصغر مِن حد فمِن
البيّن لما وطّأناهُ انّ بح اصغر مِن حج فنفصِل حط مثل حا
وحك مثل حب ونصِل طاك فخطا اح حب مثل خطى كح حط   23 u.
وزاوية احب مساوية لزاوية طحك وقاعدة اب مساوية لقاعدة كط

Quod quo facilius demonstremus, praemittimus, si linea AH linea HD maior sit, lineam BH linea HG maiorem esse, si aequalis, aequalem, si minor, minorem.

Supponamus $AH > HD$. Dico, esse $BH > HG$. Si enim ea maior non est, aut ei aequalis aut ea minor est. Supponamus igitur, eam aequalem esse. HD ad M producimus ita, ut sit $HM = AH$. Itaque AH, HB lateribus MH, HG aequalia sunt, et ex [I] 15 $\angle AHB = \angle GHM$; quare ex [I] 4 basis GM basi AB aequalis erit et omnes anguli omnibus angulis aequales. Itaque $\angle HGM = \angle ABH$. Quare ex [I] 27 linea AB lineae GM parallela erit. Itaque ex [I] 30 linea GM lineae GD parallela erit, quae inter se secant. Quod absurdum est. Ergo BH lineae HG aequalis non est.

Supponamus autem, eam minorem ea esse. Abscindimus HK lineae BH aequalem et KM ducimus. Eodem modo demonstratur, KM lineae BA parallelam esse. Quod absurdum est, quoniam linea BA lineae DG parallela est. Itaque BH linea HG minor non est. Ergo ea maior est. Eodem modo demonstratur, si $AH = HD$, esse $BH = HG$, et si minor, minorem.



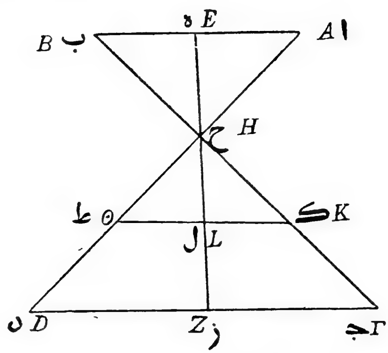
Hoc praemisso iam demonstremus, si $GZ = ZD$, esse $AE = EB$. Supponamus igitur $AH < HD$. Tum ex praemissis manifestum erit, BH minorem esse linea HG. Abscisis $H\Theta = HA$ et $HK = HB$ ducimus ΘLK. Itaque AH, HB lateribus KH, $H\Theta$ aequalia sunt, et $\angle AHB = \Theta HK$; quare basis AB basi $K\Theta$ aequalis et omnes anguli omnibus angulis aequales. Itaque $\angle HKL = \angle EBH$. Uerum $\angle EHB = \angle KHL$ et $BH = HK$; erit igitur ex [I] 26 $KL = BE$. Eadem demonstratione et eadem ratione demonstramus,

وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا فزاوية حكل مثل زاوية هبح وزاوية
هحب مثل زاوية كحل وضلع بح مثل ضلع حك فببرهان
كو[1] يكون ضلع كل مثل ضلع به وبهذا البرهان والاستشهاد
يتبيّن انّ خط اه مثل خط طل فلانّ زاوية حكط مساوية لزاوية
ابج فببرهان كو يكون خط اب موازيًا لخط طك لكن خط
اب مواز لخط جد فببرهان ل يكون خط كط موازيًا لخط جد
ولِما بيّنا فى المعنى الاوّل اذا كان جز مثل زد فانّ كل مثل لط
فخط اه اذن مثل خط هب وكذلك يتبيّن ما قصدنا لَهُ اِن كان
اح مثل حد او كان اعظم منه والمعنى الثالث انه ان كان فى
سطح اب المتوازى الاضلاع سطحا اه حد حج بز متوازيى الاضلاع
وكان سطح دز مثل سطح هج ووُصِل خط اح واُخرِج على
الاستقامة لقى نقطة ب فلتُوصَل خطوط هكد هج دز جطز ولنُخرج
اح على الاستقامة الى ط وليُوصل طب فاقول ان احطب مستقيم
اعنى انّ خط اط قد اتّصل بخط طب على استقامة برهانه ان
سطح دز وُضع مساويًا لسطح هج فيكون مثلث هحز مثل مثلث
هجح وناخذ مثلث حجز مشتركًا فيكون مثلث دجز مثل مثلث
هجز وهما على قاعدةٍ واحدةٍ وهى قاعدة جز وبين خطى جز ده
فببرهان لط فان خط جز مواز لخط ده وخط هك مساو لخط كد
وذلك بيّنٌ لان مثلث اهك مثل مثلث دكح وذلك ببرهان لد
مع برهان كط ومع برهان كو وامّا بحسب المعنى الثانى مِن
هذه المعانى فان خط جط مثل خط طز لكن خط بز مثل خط

---

[1]) In margine additum.

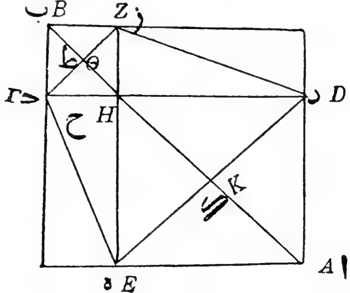
ineam AE lineae ΘL aequalem esse. Iam quoniam $\angle HK\Theta = \angle ABG$, ex [I] 27 linea AB lineae ΘK parallela erit. Uerum linea AB lineae GD parallela est; itaque ex [I] 30 linea $K\Theta$ lineae GD parallela erit. Sed ex eo, quod in notione prima demonstrauimus, erit $KL = L\Theta$, si $GZ = ZD$. Ergo $AE = EB$. Et eodem modo demonstratur, quod nobis proposuimus, si AH lineae HD aequalis aut ea maior est.



Notio tertia. Si in parallelogrammo AB duo sunt parallelogramma $AEHD$, $HGBZ$, et spatium $DZ = EG$ et linea AH ducta in directum producitur in punctum B cadit.

Lineae EKD, EG, DZ, $G\Theta Z$ ducantur. AH in directum ad Θ producamus, et ΘB ducatur. Dico, $AH\Theta B$ rectam esse, h. e. lineam $A\Theta$ in directum cum linea ΘB coniunctam esse.

Demonstratio. Spatium DZ supposuimus spatio EG aequale. Itaque $\triangle\ DHZ = EGH$. Triangulo HGZ communi sumpto erit $\triangle\ DGZ = EGZ$, qui trianguli in eadem basi GZ et inter duas lineas GZ, DE positi sunt. Ex [I] 39 igitur linea GZ lineae DE parallela est. Et $EK = KD$, quoniam ex [I] 34, 29, 26 $\triangle\ AEK = DKH$. Ex secunda igitur harum notionum $G\Theta = \Theta Z$. Sed ex [I] 34 $BZ = GH$. Itaque ΘG, GH lateribus BZ, $Z\Theta$ aequalia sunt. Et ex [I] 29 $\angle BZ\Theta = HG\Theta$; quare basis $B\Theta = \Theta H$ et $\angle B\Theta Z = G\Theta H$. Angulo igitur $H\Theta Z$ communi sumpto erit $G\Theta H + H\Theta Z = B\Theta Z + Z\Theta H$. Sed $G\Theta H + Z\Theta H = 2$ R; itaque $B\Theta Z + Z\Theta H = 2$ R. A puncto Θ igitur in linea $Z\Theta$ in diuersas partes ductae sunt duae lineae $A\Theta$, ΘB ita, ut



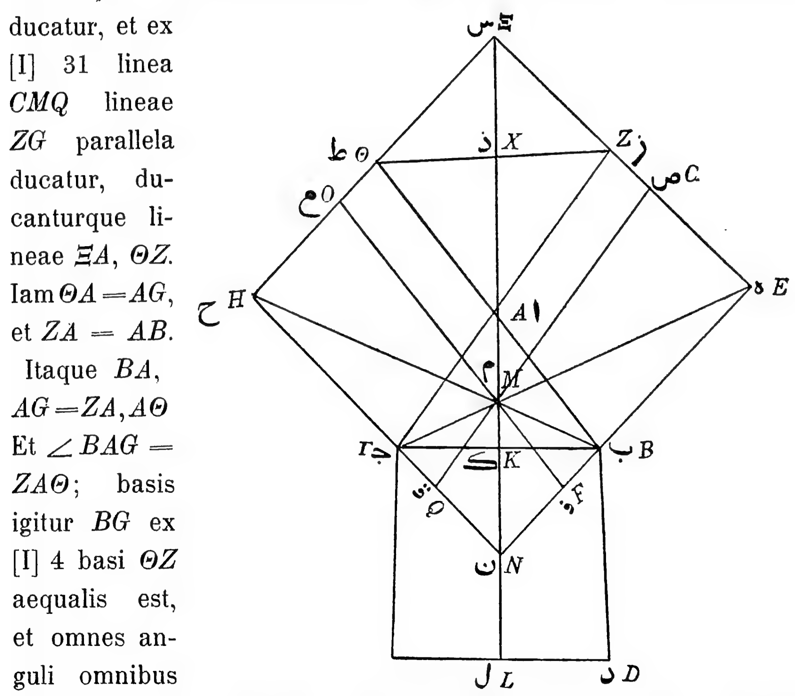
جح وذلك ببرهان لد فخطا طح جح مثل خطى بز زط وزاوية
بزط مثل زاوية حجط وذلك ببرهان د من ا فان قاعدة بط
مثل قاعدة طح وزاوية بطز مساوية لزاوية جطح وناخذ زاوية
حطز مشتركة فمجموع زاويتى جطح حطز مثل مجموع زاويتى
بطز زطح لكن مجموع زاويتى جطح زطح مثل مجموع زاويتين
قائمتين فمجموع زاويتى بطز زطح مثل مجموع زاويتين قائمتين
فقد خرج مِن نقطة ط مِن خط زط خطان فى جهتين مختلفتين
وهما خط [ا] اط طب فصيّر الزاويتين اللتين عن جنبتيه معادلتين
لزاويتين قائمتين فخط [ا] اط طب قد اتصلا على استقامة وصارا خطًا
واحدًا وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴ فاذ قد قدّمنا هذه المعانى
فلننزل ان مثلث ابج زاوية ا منه قائمة وقد عُمِل على بج مربع
جد وعلى اب مربع ابهز وعلى اج مربع اجحط وأُخرِج مِن نقطة ا
خط اكل موازيًا لخط بد ووُصِل خط هج فقاطع خطُ ال على نقطة
م ووُصِل خط حم ثم وُصلت نقطةُ م بنقطة ب فاقول ان خط مب
على استقامة خط حم فليخرج خطا هب حج على الاستقامة حتى
يلتقيا على نقطة س وتجازُ على نقطة م خط عمف موازيا لخط سه
وخط صمق موازيًا لخط زج كما بيّن اخراجُه ببرهان لا ويُوصل 24 r.
خطا سا طز فخط طا مثل خط اج وخط زا مثل خط اب فخطا با
اج مثل خطى زا اط وزاوية باج مثل زاوية زاط فقاعدة بج مثل
قاعدة طز وذلك ببرهان د وسائر الزوايا مثل سائر الزوايا فزاوية
ابج مثل زاوية طزا لكن زاوية ابج مثل زاوية جاك لان اك
عمودٌ فى مثلث ابج القائم الزاوية فزاوية طزا مثل زاوية جاك وزاوية

duo anguli ad eam positi duobus rectis aequales sint. Ergo lineae $A\Theta$, ΘB in directum coniunctae unam efficiunt lineam. Q. n. e. d.

His notionibus praemissis supponamus, angulum A in triangulo ABG rectum esse.

In BG quadratum GD, in AB quadratum $ABEZ$, in AG quadratum $AGH\Theta$ constructum est. A puncto A ducitur linea AKL lineae BD parallela, et linea EG ita ducitur, ut linea AL in puncto M secetur. Linea MH ducta punctum M cum puncto B coniungatur. Dico, lineam MB in directum lineae HM ductam esse.

Lineas EB, HG in directum producamus, donec in puncto [N concurrant, lineas autem EZ, $H\Theta$, donec in puncto] Ξ concurrant, et linea OMF lineae ΞE parallela per punctum M ducatur, et ex [I] 31 linea CMQ lineae ZG parallela ducatur, ducanturque lineae ΞA, ΘZ. Iam $\Theta A = AG$, et $ZA = AB$. Itaque BA, $AG = ZA, A\Theta$ Et $\angle BAG = ZA\Theta$; basis igitur BG ex [I] 4 basi ΘZ aequalis est, et omnes anguli omnibus angulis aequales. Itaque $\angle ABG = \Theta ZA$. Sed $\angle ABG = GAK$, quoniam AK in triangulo rectangulo perpendicularis est; quare



طزا مثل زاوية سار لانه قد أُخرج فى متوازى سا قطرا سا طز يتقاطعان على نقطة ن فيصير زن مساويًا لخط ان فزاوية سار مثل زاوية جاك وناخذ زاوية ساج مشتركة فمجموع زاويتى سار ساج مثل مجموع زاويتى ماج جاس لكن بحسب برهان يج فان مجموع زاويتى سار ساج مثل مجموع زاويتين قائمتين فمجموع زاويتى ساج جام مثل مجموع زاويتين قائمتين فبحسب برهان [يد] فان خط سام مستقيم وهو قطرٌ لمتوازى سم فبحسب برهان مج فان مُتمّم[1] اص مساو لمتمّم اع وناخذ سطح ام مشتركًا فسطح مط مثل سطح مز وايضا فانّ سطح زن متوازى الاضلاع وقطره هم ج وعن جنبتيه سطحا زم من المتوازيان وهما المُتمّمان فمتمّمُ زم مثل متمّم من فسطح من اذا مساو لسطح مط فبحسب ما بُرهان فى المعنى الثالث مِن المعانى الموطّاة لهذا الشكل يكون خط بمح مستقيما وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

زيادة فى الشكل السادس والاربعين

لثابت بن قُرّة الحرّانى الصّابئ قال ثابت بن قُرّة كل مثلث قائم الزاوية فان المربع الكائن مِن الضلع الذى يوتّر الزاوية القائمة مثل مجموع المُربّعين الكائنين مِن الضلعين اللذين يُحيطان بالزاوية القائمة مثاله ان مثلث ابج زاوية باج منه قائمة فاقول ان المُربع الكائن مِن ضلع بج مساو لمجموع المربعين الكائنين مِن ضلعى اب اج برهانه انا نعمل على خط اب مربع

[1]) In margine clarius scriptum.

$\angle\ \Theta ZA = GAK$. Uerum $\angle\ \Theta ZA = \Xi AZ$; nam quoniam in rectangulo ΞA duae ductae sunt diametri ΞA, ΘZ, quae in puncto X inter se secant, erit $ZX = AX$. Quare etiam $\angle\ \Xi AZ = GAK$. Angulo igitur ΞAG communi sumpto erit $\angle\ \Xi AZ + \Xi AG = \angle\ MAG + GA\Xi$. Sed ex [I] 13 $\angle\ \Xi AZ + \Xi AG = 2$ R; quare etiam $\angle\ \Xi AG + GAM = 2$ R. Itaque ex [I, 14] linea ΞAM recta est, et eadem diametrus parallelogrammi ΞM; quare ex [I] 43 complementum AC complemento AO aequale. Spatio igitur AM communi sumpto spatium $M\Theta$ spatio MZ aequale erit. Rursus spatium ZN parallelogrammum est, cuius diametrus EMG, et ad utramque partem eius duo spatia parallelogramma ZM, MN, quae complementa sunt; complementum igitur ZM complemento MN aequale. Itaque spatium MN spatio $M\Theta$ aequale est. Et ex notione tertia notionum huic propositioni praemissarum linea BMH recta est. Q. n. e. d.

Additamentum ad propositionem XLVI Tsabiti Ibn Qurrae Harrensis Sabii. Tsabit Ibn Qurra dixit: In quouis triangulo rectangulo quadratum lateris angulo recto oppositi summae quadratorum duorum laterum, quae rectam angulum comprehendunt, aequale erit.

Exemplificatio. In triangulo ABG angulus BAG rectus est. Dico, quadratum lateris BG summae duorum quadratorum duorum laterum AB, AG aequale esse.

Demonstratio. Constructo in linea AB quadrato AD lineam AG ad punctum Z producimus. et linea EZ lineae AG aequalis sit. Iam constructo in linea EZ quadrato EH [lineam] $D\Theta K$ [lineae] AG aequalem facimus.

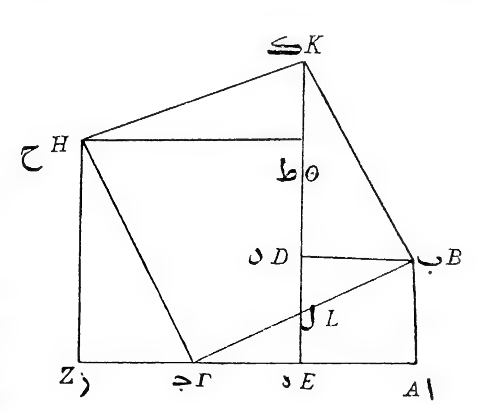
Quoniam igitur AG [lineae] EZ aequalis ducta est, [linea] EG communi subtracta relinquitur $AE = GZ$. Sed $AE = AB$; erit igitur $AB = GZ$. Rursus quoniam DK [lineae] $E\Theta$ aequalis ducta est, communi $D\Theta$ subtracta relinquitur $ED = \Theta K$. Et $ED = AB$; itaque quattuor latera quattuor triangulorum, AB, GZ, BD, ΘK inter se aequalia sunt. Et eodem modo demonstramus, inter se aequalia esse quattuor reliqua latera AG, ZH, DK, ΘH.

اد ونُخرج خط اج الى نقطة ز وليكن خط هز مثل خط اج ونعمل على خط هز مربع هح ونُخرج دطك مثل اج فلان اج أُخرِج مثل هز فاذا اسقطنا هج المشترك بقى اه مثل جز لكن اه مثل اب فخط اب مثل خط جز ∴ وايضا دك أُخرج مثل هط فنلقى دط المشترك فيبقى هد مثل طك وخط هد مثل خط اب فالاربعة الاضلاع مِن الاربع المثلثات متساوية اعنى اب جز بد طك وكذلك نبيّن ان الاربعة الاضلاع الباقية متساوية اعنى اج زح دك طح لان اج أُخرج مثل هز وهز مثل طح لان هح مربع فخط اج اذن مثل خط طح وخط دك أُخرج ايضا مثل خط اج وخط زح قد تبيّن انّه مثل هز وخط هز أُخرج مثل خط اج فقد نبيّن انّ خطوط اج زح دك حط ايضا متساوية وقد تبيّن ان زوايا المثلثات الاربعة قوائم اعنى زوايا ا ز د ط فبحسب برهان د تكون الاوتار التى توتر الزوايا المساوية وهى القوائم متساويةً فاوتار بج جح بك حك متساوية وزاوية دبك مِن مثلث كبد مساوية لزاوية ابج مِن مثلث ابج ونجعل زاوية لبد مشتركة فجميع زاوية ابد مثل زاوية جبك لكن زاوية ابد قائمة فزاوية جبك اذا قائمة وكذلك زاوية جحك قائمة وسطح بح متساوى الاضلاع فزاويتا بكح بجح كل واحدة منهما قائمة فسطح بح متساوى الاضلاع قائم الزوايا وقد بيّنا ان المثلثات الاربعة متساويات مثلثا ابج جزح مثل مثلثى بدك طكح فاذا جعلنا منحرف جل طح ومثلث بدل مشتركًا كان جميع مربع بح مساويًا لمجموع مربعى اد هح لكن مربع اد هو الكائن مِن

24 u.

Quoniam enim AG [lineae] EZ aequalis ducta est, et $EZ = \Theta H$, quia EH quadratum est, linea AG lineae ΘH aequalis erit. Uerum etiam linea DK lineae AG aequalis ducta est, et iam demonstratum est, lineam ZH [lineae] EZ aequalem esse, et linea EZ lineae AG aequalis ducta est; itaque demonstrauimus, etiam lineas AG, ZH, DK, $H\Theta$ inter se aequales esse. Sed etiam demonstratum est, angulos quattuor triangulorum rectos esse, scilicet angulos A, Z, D, Θ. Iam quoniam ex [I] 4 chordae angulis aequalibus, i. e. rectis, oppositae inter se aequales sunt, chordae BG, GH, BK, HK inter se aequales sunt. Et angulus DBK trianguli KBD angulo ABG trianguli ABG aequalis est. Communi igitur sumpto angulo LBD totus angulus ABD [toti] angulo GBK aequalis erit. Sed $\angle\ ABD$ rectus; itaque etiam $\angle\ GBK$ rectus est. Eodem modo angulus GHK rectus. Et spatium BH aequilaterum est; itaque uterque angulus BKH, BGH rectus est. Itaque spatium BH aequilaterum est et rectangulum.

Iam quoniam demonstrauimus, quattuor triangulos inter se aequales esse, duo trianguli ABG, GZH duobus triangulis BDK, ΘKH aequales sunt. Itaque trapezio $GL\Theta H$ trianguloque BDL communibus sumptis totum quadratum BH summae duorum quadratorum AD, EH aequalis erit. Sed quadratum AD quadratum lateris AB est; et quadratum EH quadratum lineae EZ, et linea EZ lateri AG aequalis; quare quadratum EH est quadratum lateris AG, et summa duorum quadratorum AD, EH quadrata sunt laterum AB, AG; et quadratum BH quadratum est lateris BG angulo recto oppositi. Ergo demonstrauimus, summam duorum quadratorum duorum laterum AB, AG quadrato lateris BG aequalem esse. Q. u. e. d.



ضلع اب ومربع هح هو الكائن مِن خط هز وخط هز مساو لضلع اج فمربع هح هو كائن مِن ضلع اج فمجموع مربعى اد هح هما الكائنان مِن ضلعى اب اج ومربع بح هو كائن مِن ضلع بج المُوتّر للزاوية القائمة فقد نبيّن ان مجموع المربعين الكائنين مِن ضلعى اب اج مساو للمربع الكائن مِن ضلع بج وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

الشكل السابع والاربعون مِن المقالة الاولى

كل مثلث يكون[1] مجموع مربعى ضلعين مِن اضلاعه مساويًا لمربع الضلع الثالث فان الزاوية التى يوتّرها الضلع الثالث قائمة[2] مثاله ان مربع ضلع بج مِن مثلث ابج مساوٍ لمجموع مربعى ضلعى اب اج فاقول ان زاوية باج قائمة برهانه انا نقيم على نقطة ا مِن خط جا عمود اد مثل ضلع اب كما بيّن ببرهان الشكل المضاف الى يا فلان اد اخرجناه مثل اب يكون المربع الكائن مِن خط اب مثل المربع الكائن مِن اد وناخذ المربع الكائن مِن خط اج مشتركا فمجموع مربعى اب اج مثل مجموع مربعى اج اد فلانّ زاوية جاد قائمة فبحسب برهان مو يكون مجموع مربعى اج اد مساويا لمربع ضلع دج فضلع بج مثل ضلع دج وضلع با مثل ضلع اد وناخذ ضلع اج مشتركا فضلعا اب اج مثل ضلعى اد اج وقاعدة دج مثل قاعدة بج فببرهان ح تكون زاوية باج مساوية لزاوية جاد لكن زاوية جاد قائمة فزاوية باج اذن قائمة فقد تبيّن ان كل مثلث يكون مجموع المربعين الكائنين مِن ضلعيه اللذين يحيطان بالزاوية † مثل [مربع] الضلع

Propositio XLVII libri primi.

Si in triangulo summa duorum quadratorum duorum laterum eius quadrato tertii lateris aequalis est, angulus, cui tertium latus oppositum est, rectus erit.

Exemplificatio. Quadratum lateris BG in triangulo ABG summae duorum quadratorum duorum laterum AB, AG aequale sit. Dico, angulum BAG rectum esse.

Demonstratio. In puncto A lineae GA perpendicularem AD lateri AB aequalem erigimus, ita ut in demonstratione propositioni [I] 11 addita*) demonstratum est. Quoniam AD [lineae] AB aequalem duximus, quadratum lineae AB quadrato [lineae] AD aequale erit. Itaque quadrato lineae AG communi sumpto summa duorum quadratorum AB, AG summae duorum quadratorum AG, AD aequalis erit. Et quoniam angulus GAD rectus est, ex [I] 46 summa duorum quadratorum AG, AD quadrato lateris DG aequalis est**). Itaque $BG = DG$. Et $BA = AD$; itaque latere AG communi sumpto duo latera AB, AG duobus lateribus AD, AG aequalia erunt. Et basis DG basi BG aequalis. Ex [I] 8 igitur $\angle\ BAG = GAD$. Sed $\angle\ GAD$ rectus. Ergo angulus BAG rectus est.

Iam demonstrauimus igitur, si in triangulo summa duorum quadratorum duorum laterum, quae angulum comprehendant, quadrato tertii lateris aequalis sit, angulum, cui latus tertium oppositum sit, rectum esse. Q. n. e. d.

*) P. 73 sq.

**) Deest: Supposuimus autem etiam $BG^2 = AB^2 + AG^2$; quare $BG^2 = DG^2$.

1) In margine: تلبيين ضلعه فى نفسه مثل تلبين الضلعين الباقيين كل واحد فى نفسه فهو قائم الزاوية Laterculus lateris eius in se multiplicati laterculis utriusque reliquorum laterum in se multiplicati aequalis est et rectangulus est.

2) In margine: قال ايرن هذا الشكل عكس الذى قبله Hero dixit: haec propositio inuersio praecedentis est. Cfr. Proclus p. 429.22 sq.



الثالث فان الزاوية التى يوترها الضلعُ الثالث تكون قائمة وذلك ما اردنا ان نبيّن ∴

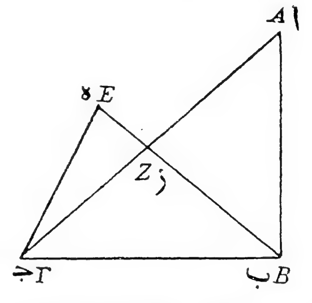
برهان لهذا الشكل لِايرُن

قال ايرُن اقول ان الخط الذى يخرج مِن نقطة ب على زاوية قائمة على خط بج مِن جهةِ اب الذى مربعهُ مع مربع بج مساو لمربع اج لا يكون غير خط اب فان امكن ان يكون غيره فليس يخلوُ مِن ان يقع دُونهُ او ورآءهُ فلنُنزِل انه وقع من دونه كخط بز حتى تكون زاوية زبج قائمة فزاوية بزج اصغر مِن قائمة وذلك بحسب برهان يز فزاوية ازب منفرجة وذلك بحسب برهان يج فزاوية 25 r. زاب حادّة وذلك بحسب برهان يز فبحسب برهان يط يكون ضلع اب اعظم مِن ضلع بز ونخرج بز على الاستقامة الى نقطة ه حتى يكون بزه مثل خط با ونخرج خط هج فمربع خط هب اعنى مربع خط اب مع مربع بج مثل مربع هج وقد كانا مثل مربع اج فخط اج مثل خط هج وخط اب مثل خط هب فقد خرج مِن طرفى خط مستقيم خطان مستقيمان فى جهتين مختلفتين والتقى طرفاهما على نقطة وخرج مِن مخرجيهما خطان آخران مساويان لهما فى تلك الجهة التقى طرفاهما على غير تلك النقطة فبحسب برهان ز يكون هذا السياق مُحالًا وكذلك يسوقُ الى المُحال ان كانَ الخط يقعُ مِن ورآء خط اب فخط اب اذن هو الذى على زاوية قائمة مِن خط بج وذلك ما اردنا ان نبيّن تمت المقالة الاولى مِن كتاب اوقليدس



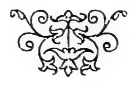
Heronis demonstratio ad hanc propositionem. Hero dixit*): Dico, lineam a puncto B ad rectam BG perpendicularem ductam uersus partes [lineae] AB, cuius quadratum cum quadrato [lineae] BG quadrato [lineae] AG aequale sit, nullam aliam esse ac lineam AB.

Si enim fieri possit, ut sit alia, aut intra eam aut extra cadat, necesse est. Supponamus igitur, eam intra cadere ut BZ, ita ut $\angle ZBG$ rectus sit. Itaque ex [I] 17 $\angle BZG$ minor est recto; quare ex [I] 13 $\angle AZB$ obtusus est et ex [I] 17 $\angle ZAB$ acutus. Itaque ex [I] 19 latus $AB > BZ$. Lineam BZ in directum producimus ad punctum E, ita ut sit $BZE = BA$, et lineam EG ducimus. Erit igitur quadratum lineae EB, h. e. lineae AB, cum quadrato [lineae] BG quadrato EG aequale. Uerum duo illa quadrata etiam quadrato [lineae] AG aequalia sunt; itaque $AG = EG$. Est autem etiam $AB = EB$. Itaque a terminis lineae rectae duae rectae in partes diuersas ductae sunt, quarum termini in puncto concurrunt, et ab iisdem terminis, unde ductae sunt, aliae duae lineae iis aequales ad eandem partem ductae sunt, quarum termini in alio puncto concurrunt; quod ex [I] 7 absurdum est.



Eodem modo absurdum sequitur, si linea extra lineam AB cadit. Ergo linea AB ea est, quae ad lineam BG perpendicularis est. Q. n. e. d.

Finis libri primi libri Euclidis.



*) Cfr. Proclus p. 430, 4 sqq., ubi Hero non nominatur.

